

УДК: 536.21;27.35.25

## Тепловые волны в нелинейном анизотропном пространстве\*

Формалёв В.Ф., Селин И.А.

### Аннотация

Получено аналитическое решение задачи Коши для квазилинейного уравнения параболического типа в анизотропном пространстве со степенной зависимостью от температуры компонентов тензора теплопроводности. Анализ решения показал волновой характер распространения тепла с конечной скоростью в отличие от бесконечной скорости для линейного уравнения параболического типа. Показано, что фронт тепловой волны в анизотропном пространстве имеет форму эллипсов на плоскости и эллипсоидов в трёхмерном пространстве. Обсуждаются результаты.

Quasilinear parabolic equation with initial conditions is solved in an anisotropic space where heat conductivity tensor's components have power dependence from temperature. Analysis of the solution has show a wave type and finite speed of the diffusion of heat as opposed to infinite speed of case parabolic type linear equation. It is displayed that heat wave's front in the anisotropic space likes ellipse in case of a plane and likes ellipsoid in case of space. Results are discussed.

### Ключевые слова

теплоперенос, квазилинейное уравнение теплопроводности, анизотропное пространство, тепловая волна, задача Коши.

### Key words

heat transmission, quasilinear heat conductivity equation, anisotropic space, heat wave, Koshi's problem.

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №08-08-00896-а Федеральной целевой программы НК-85/8(2).

## Введение

Известно, что распространение тепла, описываемое линейным уравнением параболического типа, осуществляется с бесконечной скоростью [1–6]. Это следует из любого фундаментального решения линейного уравнения диффузии. Этот факт приводит к парадоксу распространения тепла, поскольку все опытные данные показывают хотя и большую, но конечную скорость распространения тепла. Для преодоления этого парадокса ещё Максвелл [7] выдвинул гипотезу о том, что распространение тепла имеет не только диффузионный характер, но и волновой. В соответствии с этим, Каттанео [4] в классическом законе Фурье о пропорциональности теплового потока антиградиенту температуры, выражающим диффузионный характер распространения тепла, добавил слагаемое в виде производной теплового потока по времени, выражающее волновой характер распространения тепла

$$q(x,t) = -\lambda \operatorname{grad}T(x,t) - \tau \frac{\partial q(x,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\tau$  – время, в течение которого устанавливается термодинамическое равновесие между градиентом температуры и тепловым потоком. В литературе это время называют временем релаксации теплового потока.

Уравнение теплопроводности на основе закона (1) является уравнением гиперболического типа и имеет волновой характер с конечной скоростью распространения тепла с учётом затухания

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(a \cdot \operatorname{grad}T), \quad (2)$$

где  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  – коэффициент температуропроводности.

Из анализа закона (1) ясно, что слагаемые, содержащие плотность теплового потока  $q(x,t)$ , образуют первые два члена разложения  $q(x,t+\tau)$  в ряд Тейлора по степеням  $\tau$ , в соответствии с чем этот закон можно представить в виде

$$q(x,t+\tau) = -\lambda \operatorname{grad}T(x,t), \quad (3)$$

из которого видно запаздывание теплового потока относительно градиента температуры. Из этого же закона следует важное предположение о том, что тепловой поток зависит не только от его скорости, но и от ускорения  $\frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$  и т.д.

Закон (3) имеет форму классического закона Фурье, но с запаздывающим аргументом: при возникновении градиента температуры в момент времени  $t$ , тепловой поток формируется в момент времени  $t + \tau$ , то есть запаздывает на величину времени релаксации  $\tau$ .

Уравнение теплопроводности на основе закона (3) будет теперь иметь вид

$$c\rho \frac{\partial T(x, t' - \tau)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}T(x, t')), \quad (4)$$

где  $t' = t + \tau$ .

Для большинства материалов теплопроводность является функцией температуры  $\lambda(T)$ , в соответствии с чем уравнение теплопроводности является нелинейным (квазилинейным – нелинейным относительно функции и младших производных и линейным относительно старших производных), то есть

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (5)$$

В [2] установлено, что решение квазилинейного уравнения (5) имеет так же волновой характер, когда температурный фронт распространяется по пространству с нулевой начальной температурой.

В данной статье рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности в анизотропном пространстве и устанавливается волновой характер распространения тепла, то есть в каждый момент времени изотермическая поверхность разделяет конечное пространство с ненулевой температурой и полубесконечное пространство с нулевой (начальной температурой).

## 1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарное распределение температуры  $T(x, y, t)$  в двумерном анизотропном пространстве от мгновенного точечного источника с энергией  $E_0$ , приложенного в начале координат  $x = 0, y = 0$  в начальный момент времени  $t = 0$ , то есть рассматривается следующая задача Коши:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yx}(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yy}(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (6)$$

$$(x, y) \in (-\infty; \infty), t > 0;$$

$$T(x, y, t)_{t \rightarrow 0} \rightarrow E_0 \delta(x - 0, y - 0), \quad (7)$$

где  $\delta(x, y)$  – дельта-функция Дирака, а  $E_0$  – энергия, постоянная в любой момент времени, то есть с постоянной энергией

$$\iint_{\Omega} T(x, y, t) dx dy = E_0 = const, \quad (8)$$

где  $t$  – параметр.

Поскольку условие (7) связано с условием (8) и должно быть получено из решения задачи (6), (8) предельным переходом при  $t \rightarrow 0$ , то ниже оно не рассматривается, а рассматривается условие постоянства энергии (8).

Компоненты тензора теплопроводности определяются выражениями [8]

$$\lambda_{xx}(T) = \lambda_{\xi}(T) \cos^2(\varphi) + \lambda_{\eta}(T) \sin^2(\varphi)$$

$$\lambda_{yy}(T) = \lambda_{\xi}(T) \sin^2(\varphi) + \lambda_{\eta}(T) \cos^2(\varphi) \quad (9)$$

$$\lambda_{xy}(T) = \lambda_{yx}(T) = (\lambda_{\xi}(T) - \lambda_{\eta}(T)) \sin(\varphi) \cos(\varphi),$$

где главные компоненты тензора теплопроводности зависят от температуры

$$\lambda_{\xi} = k_{\xi} T^{\sigma}, \quad \lambda_{\eta} = k_{\eta} T^{\sigma}, \quad k_{\xi} = \text{const}_1, \quad k_{\eta} = \text{const}_2, \quad (10)$$

а  $\varphi$  – угол, ориентирующий главную ось  $O\xi$ , а следовательно и ось  $O\eta$  относительно декартовой оси  $Ox$ .

Таким образом, необходимо найти нестационарное распределение температур  $T(x, y, t)$  под действием точечного источника (7), приложенного в точке  $x = 0, y = 0$  в начальный момент времени  $t = 0$ , причём в остальных точках пространства, в соответствии с (7), в момент  $t = 0$  температура  $T(x, y)$  равна нулю.

## 2. Метод решения

Аффинным преобразованием (обычным поворотом вокруг начала координат на угол  $\varphi$  декартовой систем координат)

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) \\ \eta &= -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos(\varphi) - \eta \sin(\varphi) \\ y &= \xi \sin(\varphi) + \eta \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

задача (6) – (8) сводится к задаче для уравнения, не содержащего смешанных дифференциальных операторов

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( k_{\xi} T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( k_{\eta} T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right), \quad (\xi, \eta) \in (-\infty; \infty), \quad t > 0; \quad (13)$$

$$\iint_{\Omega} T(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = E_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Якобиан аффинного преобразования равен 1.

Перейдём к новой системе координат

$$x_1 = \xi \left( \frac{\lambda}{k_\xi} \right)^{1/2}, \quad x_2 = \eta \left( \frac{\lambda}{k_\eta} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где  $\lambda$  – любое (например,  $\lambda = 1$ ), получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x_1} \left( T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + a \frac{\partial}{\partial x_2} \left( T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x_2} \right), \quad (x_1, x_2) \in (-\infty; \infty), \quad t > 0, \quad (16)$$

где  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ ;

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} \iint_{\Omega} T(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 = E_0. \quad (17)$$

Будем искать решение задачи (16), (17) в автомодельном виде с использованием подстановки

$$T(x_1, x_2, t) = t^\alpha \theta(q_1, q_2), \quad (18)$$

где

$$q_1 = \frac{x_1}{t^\beta}; \quad q_2 = \frac{x_2}{t^\beta}. \quad (19)$$

В (18), (19) показатели степеней  $\alpha$  и  $\beta$  подлежат определению. Для их определения подставим (18), (19) в (16), (17), получим

$$t^{\alpha-1} \left[ \alpha \theta(q_1, q_2) - \beta \left( q_1 \frac{\partial \theta}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) \right] = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta} a \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) \right]; \quad (20)$$

$$t^{\alpha+2\beta} \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} \iint_{\Omega} \theta(q_1, q_2) dq_1 dq_2 = E_0. \quad (21)$$

Из уравнений (20), (21) получаем следующие два соотношения для определения  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha - 1 = \alpha(\sigma + 1) - 2\beta,$$

$$\alpha + 2\beta = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{1}{\sigma + 1}; \quad \beta = \frac{1}{2\sigma + 2}. \quad (22)$$

С учётом (22) задача (20), (21) запишется в виде

$$a \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + a \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{2\sigma + 2} \left( q_1 \frac{\partial \theta}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{\sigma + 1} \theta = 0,$$

$$(q_1, q_2) \in (-\infty; \infty); \quad (23)$$

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} \iint_{\Omega} \theta(q_1, q_2) dq_1 dq_2 = E_0 = \text{const}. \quad (24)$$

Пусть функция  $\theta(q_1, q_2)$  является радиально симметричной, то есть зависит от одной полярной координаты  $r$

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos(\gamma) & r &= \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \\ q_2 &= r \sin(\gamma) & \gamma &= \text{arctg} \left( \frac{q_2}{q_1} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда задача (23), (24) трансформируется в следующую задачу Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{r}{2\sigma + 2} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\theta}{\sigma + 1} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} 2\pi \int_r r \theta(r) dr = E_0. \quad (27)$$

Интеграл по переменной  $\gamma$  равен  $2\pi$ , а якобиан, при переходе к полярной системе координат, равен  $r$ .

Поскольку функция  $\theta(q_1, q_2)$  является радиально симметричной, то для уравнения (26) должно выполняться условие симметрии

$$\theta^\sigma \theta'(0) = 0. \quad (28)$$

Таким образом, задача Коши (26) – (28) представляется в виде

$$(r\theta^\sigma \theta')' + \frac{1}{a(2\sigma+2)} (\theta r^2)' = 0; \quad (29)$$

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} 2\pi \int_r r \theta(r) dr = E_0; \quad (30)$$

$$\theta^\sigma \theta'(0) = 0. \quad (31)$$

Первый интеграл уравнения (29) будет

$$r\theta^\sigma \theta' + \frac{1}{a(2\sigma+2)} \theta r^2 = C_1,$$

причём в силу симметрии (31) при  $r = 0$  постоянная  $C_1 = 0$ . Следовательно

$$r\theta^\sigma \theta' + \frac{1}{a(2\sigma+2)} \theta r^2 = 0; \quad (32)$$

$$\frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} 2\pi \int_r r \theta(r) dr = E_0. \quad (33)$$

Уравнение (32) – обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$\theta(r) = \left( \frac{\sigma_0^2}{2a(2\sigma+2)} - \frac{\sigma r^2}{2a(2\sigma+2)} \right)^{1/\sigma}, \quad (34)$$

в котором постоянная интегрирования  $r_0^2$  может быть определена из условия постоянства энергии (33)

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} \left( \frac{\sigma}{2a(2\sigma+2)} \right)^{1/\sigma} \int_r^{r_0} r (r_0^2 - r^2)^{1/\sigma} dr = E_0. \quad (35)$$

Интеграл в левой части выражения (35) вычисляется в квадратурах, для чего преобразуем его к виду

$$2\pi \frac{\sqrt{k_\xi k_\eta}}{\lambda} \left( \frac{\sigma}{2a(2\sigma+2)} \right)^{1/\sigma} (r_0^2)^{\frac{\sigma+1}{\sigma}} \int_0^{r_0} \frac{r}{r_0} \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right)^{1/\sigma} d\left( \frac{r}{r_0} \right) = E_0. \quad (36)$$

В соответствии с [9] имеем

$$\int_0^1 z^m (1-z^2)^p dz = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(p+\frac{m+3}{2}\right)}, \quad \{p+1, m+1\} > 0. \quad (37)$$

Учитывая, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)\Gamma(1)} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}+1\right)} = \frac{1}{\sigma}+1,$$

из (36), (37) получаем

$$r_0^2(E_0) = \left( \frac{\lambda E_0}{2\pi \left(\frac{1}{\sigma} + 1\right) \sqrt{k_\xi k_\eta} \left[ \frac{2a(2\sigma + 2)}{\sigma} \right]^{1/\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}. \quad (38)$$

Выражения (34), (38) определяют решение задачи Коши (29) – (31) и через (18) – решение задачи (16), (17). Возвращаясь к декартовым координатам, получаем окончательно решение исходной задачи (6) – (8)

$$T(x, y, t) = \frac{1}{t^{1/(\sigma+1)}} \left( \frac{\sigma}{2a(2\sigma + 2)} \right)^{1/\sigma} \left( r_0^2 - \frac{(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))^2 \frac{\lambda}{k_\xi} + (-x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))^2 \frac{\lambda}{k_\eta}}{t^{1/(\sigma+1)}} \right)^{1/\sigma} \quad (39)$$

где  $r_0^2$  определяется выражением (38).

### 3. Анализ результатов

Из (38) и (39) видно, что решение не существует при следующих  $\sigma$ :  $\sigma = -1$ ,  $\sigma = 0$ .

Из анализа условия  $p + 1 > 0$  в (37) следует, что  $\frac{1}{\sigma} + 1 > 0$ , откуда следует, что

$$\sigma \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty). \quad (40)$$

Температурное возмущение существует только внутри эллипса, полуоси которого при  $\varphi = 0$  представляются выражениями

$$r_0 \sqrt{\frac{k_\xi}{\lambda}} t^{\frac{1}{2\sigma+2}} \quad (41)$$

по оси  $Ox$ ,

$$r_0 \sqrt{\frac{k_\eta}{\lambda}} t^{\frac{1}{2\sigma+2}} \quad (42)$$

по оси  $Oy$ .

На рисунках (1) – (3) приведены результаты расчётов температурных полей по формулам (38), (39) со следующими входными данными:  $\sigma = 0.5$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 1.5$ ,

$$\varphi = 0, k_{\xi} = 5, k_{\eta} = 1, \lambda = 1, c\rho = 2000 \text{ Дж}/(\text{м}^3\text{К}), E_0 = 1.$$

Из рисунков ясно, что распределение температур имеет волновой характер с фронтом волны на изотерме  $T = 0$ , описываемой эллипсами с полуосями (41), (42).

При  $t \rightarrow 0 + 0$  решение (39) стремится к дельта-функции  $\lim_{t \rightarrow 0+0} T(x, y, t) = E_0 \delta(x-0, y-0)$ .

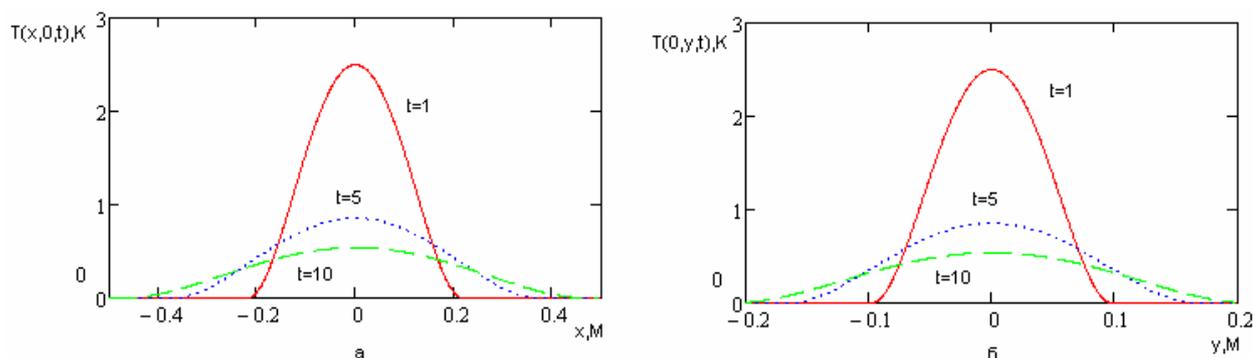


Рис.1. Распределение температур при  $\sigma = 0.5$ : а – в сечении  $y = 0$ , б – в сечении  $x = 0$ .

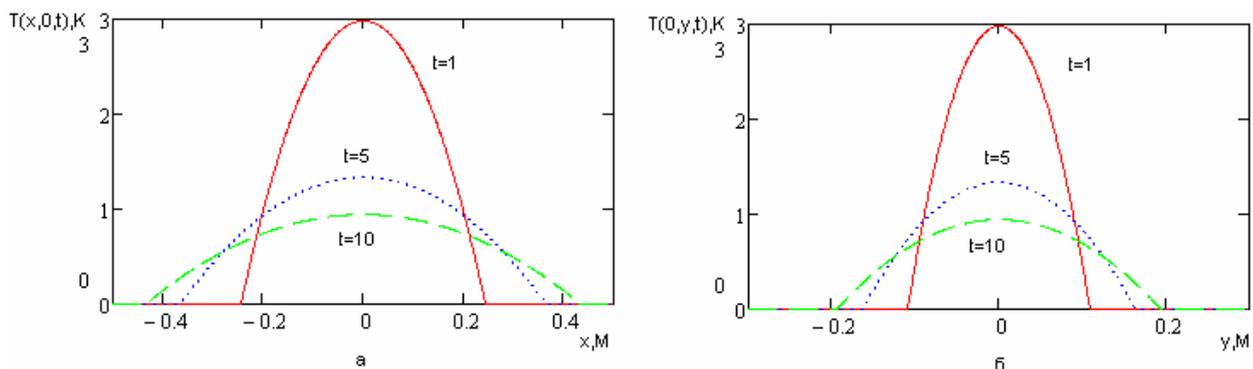


Рис.2. Распределение температур при  $\sigma = 1$ : а – в сечении  $y = 0$ , б – в сечении  $x = 0$ .

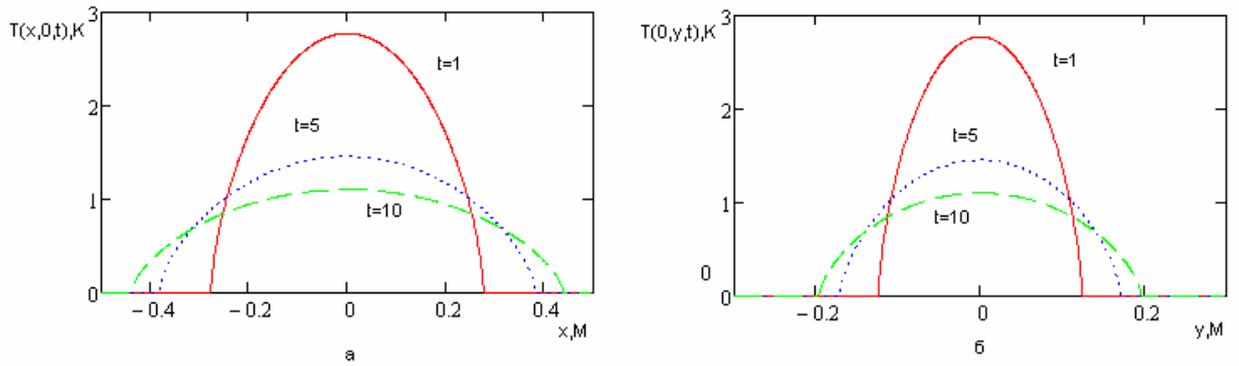


Рис.3. Распределение температур при  $\sigma = 1.5$ : а – в сечении  $y = 0$ , б – в сечении  $x = 0$ .

Из рисунков видно, что областями ненулевого решения в различные моменты времени являются области, ограниченные эллипсами с полуосями (41), (42). Кроме того, в силу постоянства энергии, равной  $E_0$ , двойные интегралы по переменным  $x$  и  $y$  от выражения (39) в различные моменты времени постоянны и равны  $E_0$ .

При увеличении параметра  $\sigma$  поверхности, образуемые изотермами, не равными нулю, имеют большую область определения, а максимальные значения уменьшаются.

При  $\sigma \geq 1$  производная по времени и первые производные по пространственным переменным существуют только внутри областей, ограниченных эллипсами с полуосями (41), (42). Это обусловлено тем, что выражение

$$r_0^2 - \frac{(x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi))^2 \frac{\lambda}{k_\xi} + (-x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))^2 \frac{\lambda}{k_\eta}}{t^{1/(\sigma+1)}}$$

должно быть больше нуля. В точках фронта при  $\sigma \geq 1$  первые производные по времени и первые и вторые производные по пространственным переменным не существуют.

При  $\sigma \in [0.5; 1)$  первые производные по времени и по пространству существуют внутри областей, ограниченных эллипсами с полуосями (41), (42) и в точках фронта. Вторые производные в точках фронта – не существуют.

При  $\sigma \in (0; 0.5)$  существуют производные по времени и вторые производные

по пространственным переменным внутри областей, ограниченных эллипсами с полуосями (41), (42) и в точках фронта.

## **Выводы**

Впервые получено и проанализировано аналитическое решение задачи Коши в нелинейном анизотропном пространстве для квазилинейного уравнения теплопроводности с тензором теплопроводности, компоненты которого являются степенными функциями температуры. Это решение показало волновой характер распространения тепла. Волновыми фронтами в анизотропном случае в различные моменты времени являются эллипсы на плоскости (эллипсоиды – в трехмерном пространстве).

Проведён анализ существования решения на фронте волны и производных разных порядков по времени и пространству на всей плоскости в зависимости от показателя степени температуры, от которой зависят компоненты тензора теплопроводности.

## **Summary**

For the first time analytical solution of the problem with initial conditions in the non-linear anisotropic space for the quasilinear parabolic heat equation where heat conductivity tensor's components are temperature functions is obtained. This solution has show a wave type of the heat diffusion. Wave's fronts are ellipse in the anisotropic space at different time moment (in three-dimensional case are ellipsoid).

Existence of the solution in wave's front and time derivative and space derivatives different orders has been analysed dependence from power of temperature which influences heat conductivity tensor's components.

## Библиографический список

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599с.
2. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. М.: Едиториал УРСС, 2004. 290с.
3. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 490с.
4. Соболев С.Л., Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. Успехи физических наук. 1991. Т.161. № 3. 5-29с.
5. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкциях летательных аппаратов (методы расчёта). М.: Машиностроение, 1978. 184с.
6. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа. 2001. 550с.
7. Maxwell S.C.// Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1867. V.157. p.49.
8. Формалёв В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор// Теплофизика высоких температур. 2001. Т.39. №5. 810с.
9. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1964. 228с.

## Авторы

Формалёв Владимир Федорович, работает в МАИ, д.ф.-м.н., профессор, 496-39-71, моб. 8-905-569-44-74.

Селин Илья Александрович, работает в ВНИИЭМ, инженер, аспирант МАИ, 615-62-23, моб. 8-910-491-45-33.