УДК 519.246.2

Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 1.

Косачев И.М.[1*], Чугай К.Н.[2], Рыбаков К.А.[3***]**

[1]Военная академия Республики Беларусь,

проспект Независимости, 220, Минск, 220057, Беларусь

[2]Научно-исследовательский институт Вооруженных Сил,

ул. Славинского, 4/3, Минск, 220103, Беларусь

[3]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское ш., 4, Москва, 125993, Россия

[*]e-mail: kosachev1301@mail.ru

[**]e-mail: konstantin.ch40@gmail.com

[***]e-mail: rkoffice@mail.ru

Статья поступила 25.04.2019

Аннотация

В статье излагается первая часть методологии высокоточной нелинейной фильтрации многомерных негауссовых случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Высокая точность разработанных алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации обусловлена за счет итерационного учета в них высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса в общем случае произвольного порядка. Адаптивность разработанных алгоритмов высокоточной нелинейной фильтрации обеспечивается путем расчета на ЭВМ в реальном времени апостериорных асимметрий и апостериорных эксцессов всех фазовых координат фильтруемого процесса, последующего их сравнения с пороговыми значениями, соответствующими гауссовому процессу, и при необходимости путем итерационного учета в алгоритмах фильтрации высших апостериорных центральных моментов фильтруемого процесса.

Ключевые слова: высокоточная фильтрация, случайный процесс, динамическая система, стохастическая система, фиксированная структура.

Введение

При разработке вооружения и военной техники (ВВТ), пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов, а также других сложных технических систем центральной задачей является синтез алгоритмов оптимального управления ими. В соответствии с теоремой разделения [1–4] в теории стохастического оптимального управления для достижения поставленной цели требуется сначала решить задачу оптимальной нелинейной фильтрации случайных процессов (СП), протекающих в этих системах, а затем на основании этого решения осуществить синтез алгоритмов оптимального управления ими по заданному критерию оптимальности.

Математическое описание сложных технических систем во многих случаях практики можно рассматривать в классе нестационарных нелинейных непрерывных стохастических динамических систем с фиксированной структурой (ДСФС).

Под фильтрацией СП $Y(t)$ в ДСФС понимается оценивание данного процесса в текущий момент времени t на основании его наблюдений $Z(t)$ до момента времени t

с помощью измерителя, или канала наблюдения (КН), и априорной информации о фильтруемом процессе (ФП) [1–12].

В настоящее время для оценивания СП наиболее широко используется теория калмановской фильтрации [13–16], которая позволяет получить замкнутые алгоритмы оценивания. Однако теория калмановской фильтрации эффективно работает только при гауссовой (нормальной) или близкой к ней плотности распределения вероятностей (ПРВ) ФП и линейном КН. В ВВТ и других сложных технических системах ПРВ ФП часто не является гауссовой.

В современной теории оптимальной нелинейной фильтрации негауссовых СП используются приближенные методы, основанные на параметрической или функциональной аппроксимации апостериорной плотности распределения вероятностей (АПРВ) $\hat{\omega}(y,t)$ ФП $Y(t)$.

К методам параметрической аппроксимации относятся: моментный [2–4], квазимоментный [4, 12], кумулянтный (семиинвариантный) [4, 12], моментно-семиинвариантный [17–19] и эллипсоидальный [4, 6] методы. Суть методов параметрической аппроксимации заключается в получении системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка для определения числовых характеристик АПРВ: апостериорных начальных или центральных моментов (ЦМ), апостериорных кумулянтов (семиинвариантов) или апостериорных квазимоментов.

Достоинством методов параметрической аппроксимации АПРВ является возможность учета ее негауссового характера путем расчета указанных апостериорных числовых характеристик.

Можно отметить следующие недостатки данного подхода:

1) аппроксимация неизвестной АПРВ частичной суммой ряда этих апостериорных числовых характеристик в общем случае не обеспечивает гарантированной точности решения задачи фильтрации из-за возможности появления отрицательных значений частичной суммы ряда;

2) до проведения модельного эксперимента невозможно определить требуемое число членов ряда аппроксимации негауссовой АПРВ с помощью указанных апостериорных числовых характеристик;

3) уравнения для апостериорных кумулянтов (семиинвариантов) хотя и обладают свойством монотонности затухания с ростом их порядка, однако они являются чрезвычайно сложными и громоздкими. Их решение (интегрирование) в реальном масштабе времени возможно при оценке негауссовых СП с малой размерностью фазового пространства;

4) более простые уравнения для апостериорных центральных моментов (АЦМ) ФП не обладают свойством монотонности затухания с ростом их порядка, что не позволяет обоснованно усечь (ограничить) данную систему уравнений при ее интегрировании;

5) не существует эффективных методов раскрытия усреднений от многоаргументных нелинейностей произвольного вида $\varphi(y_1, y_2,..., y_N)$, входящих в уравнения для указанных апостериорных числовых характеристик даже при гауссовой АПРВ аргументов нелинейности, не говоря уже о случае, когда эта ПРВ является существенно негауссовой.

Одна из этих проблем была решена М.Л. Дашевским, который разработал моментно-семиинвариантный метод [17, 18]. Данный метод позволяет интегрировать более простые уравнения для АЦМ ФП, а выбор максимального порядка учитываемых моментов производить по формулам связи кумулянтов (семиинвариантов) и АЦМ путем приравнивания к нулю кумулянтов высших (начиная с третьего) порядков. В дальнейшем этот метод был модифицирован А.Г. Кашкаровой и В.И. Шином, которые предложили приравнивать к нулю не только кумулянты высших порядков, но и младшие смешанные кумулянты [19]. Благодаря этому число интегрируемых уравнений резко уменьшается при незначительной (по мнению авторов, не более 10 %) потере точности по сравнению с немодифицированным моментно-семиинвариантным методом. Однако для многомерных систем (многомерных ФП) уравнения связи кумулянтов и ЦМ получены А.Н. Малаховым [20] только до шестого порядка включительно. Для более высоких порядков уравнения связи кумулянтов и ЦМ для многомерных негауссовых СП не получены.

К методам функциональной аппроксимации негауссовой АПРВ относятся [4, 6, 21, 22]:

- метод аппроксимации АПРВ частичной суммой ряда Грамма–Шарлье, Эджворта или Лагерра, спектральный метод;
- метод полигауссовой аппроксимации АПРВ, заключающийся в ее более точной аппроксимации суммой гауссовых ПРВ.

Метод функциональной аппроксимации имеет следующие недостатки:

1) далеко не всегда в качестве базовой можно принять гауссовую ПРВ ФП;

2) вид АПРВ заранее, как правило, не известен, что затрудняет выбор аппроксимирующей ПРВ из существующих видов распределений, а следовательно, делает невозможным строгое решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации.

В своем большинстве ВВТ представляют собой сложные многомерные нелинейные нестационарные стохастические динамические системы, в которых ПРВ многих фазовых координат является негауссовой, а КН – нелинейным. Это требует разработки общей методологии синтеза оптимальных нелинейных фильтров для высокоточного оценивания негауссовых СП.

Ниже излагается общая методология высокоточной нелинейной фильтрации многомерных негауссовых СП в стохастических ДСФС.

Постановка задачи высокоточной оптимальной нелинейной фильтрации

Постановку задачи оптимальной нелинейной фильтрации СП в стохастической ДСФС удобно пояснить с помощью рис. 1.

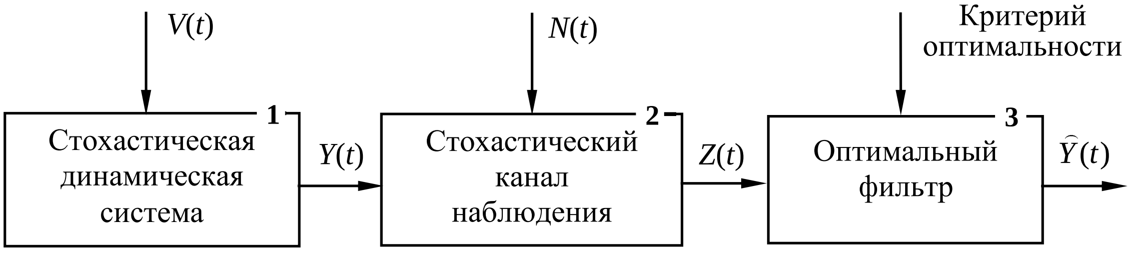

Рис. 1. Функциональная схема, поясняющая задачу оптимальной нелинейной фильтрации СП в ДСФС

На этом рисунке блоком 1 обозначена математическая модель наблюдаемой стохастической ДСФС (фильтруемого многомерного СП), которая описывается системой нелинейных СДУ с аддитивными белыми шумами (БШ) вида

$$\dot{Y}(t) = C(t) + D(t)Y(t) + B(t)\Phi(Y,t) + H(t)V(t), \qquad Y(0) = Y_0, \tag{1}$$

где $Y(t)$ – N_Y-мерный случайный вектор фазовых координат стохастической динамической системы (ФП) с компонентами $Y_p(t)$, $C(t)$ – N_Y-мерный вектор входных детерминированных функций с компонентами $c_p(t)$, $p=\overline{1,N_Y}$; $D(t)$ – $(N_Y \times N_Y)$-мерная матрица в общем случае нестационарных коэффициентов при фазовых координатах с компонентами $d_{pi}(t)$, $p,i=\overline{1,N_Y}$; $B(t)$ – $(N_Y\times N_\Phi)$-мерная матрица в общем случае нестационарных коэффициентов при нелинейностях с компонентами $b_{pi}(t)$, $p=\overline{1,N_Y}$, $i=\overline{1,N_\Phi}$; $\Phi(Y,t)$ – N_Φ-мерная детерминированная векторная нелинейная функция с компонентами $\varphi_p(Y,t)$, $p=\overline{1,N_\Phi}$; $H(t)$ – $(N_Y\times N_V)$-мерная матрица нестационарных коэффициентов при БШ с компонентами $h_{pi}(t)$, $p=\overline{1,N_Y}$, $i=\overline{1,N_V}$; $V(t)$ – N_V-мерный вектор центрированного гауссового БШ с симметричной положительно определенной матрицей интенсивностей $G(t)$ с компонентами $G_{ij}(t)$ и корреляционной матрицей $K_V(t,t')=G(t)\delta(t-t')$, $i,j=\overline{1,N_V}$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Присутствующие в данных уравнениях шумы $V(t)$ обусловлены влиянием внешних преднамеренных и непреднамеренных помех, а также внутренних возмущающих воздействий на стохастическую динамическую систему.

С помощью КН, показанного на рис. 1 блоком 2, проводятся измерения СП $Y(t)$. Математическая модель (ММ) безынерционного нелинейного КН с аддитивными БШ описывается системой нелинейных уравнений вида

$$Z(t) = S(t)\Psi(Y, t) + M(t)N(t), \tag{2}$$

где $Z(t)$ – N_Z-мерный случайный вектор измерений СП $Y(t)$ размерности $N_Z \le N_Y$ с компонентами $Z_p(t)$, $p = \overline{1, N_Z}$; $S(t)$ – $(N_Z \times N_\Psi)$-мерная матрица детерминированных нестационарных коэффициентов при нелинейностях КН с компонентами $s_{pi}(t)$, $p = \overline{1, N_Z}$, $i = \overline{1, N_\Psi}$; $\Psi(Y,t)$ – N_ψ-мерная детерминированная векторная нелинейная функция с компонентами $\psi_p(Y,t)$, $p = \overline{1, N_\Psi}$; $M(t)$ – $(N_Z \times N_N)$-мерная матрица в общем случае нестационарных коэффициентов при БШ в КН с компонентами $m_{pi}(t)$, $p = \overline{1, N_Z}$, $i = \overline{1, N_N}$; $N(t)$ – N_N-мерный вектор центрированного гауссового БШ в КН с симметричной положительно определенной матрицей интенсивностей $Q(t)$ с компонентами $Q_{ij}(t)$ и корреляционной матрицей $K_N(t,t') = Q(t)\delta(t - t')$, $i, j = \overline{1, N_N}$.

На практике довольно часто КН является инерционным. ММ нелинейного инерционного КН с аддитивным гауссовым БШ имеет вид (3), а с мультипликативным шумом – вид (4):

$$\dot{Z}(t) = R(t)Z(t) + S(t)\Psi(Y, t) + M(t)N(t), \tag{3}$$

$$\dot{Z}(t) = R(t)Z(t) + S(t)\Psi(Y, t) + M(Y, t)N(t), \tag{4}$$

где $R(t)$ – известная $(N_Z \times N_Z)$-мерная матрица в общем случае нестационарных детерминированных коэффициентов.

С учетом преобразования вектора измерений $Z^*(t)$ к виду [3, 4, 6, 8] $Z^*(t) = \dot{Z}(t) - R(t)Z(t)$ уравнение для инерционного КН с аддитивными шумами (3) преобразуется к виду (5), а с мультипликативными шумами – к виду (6):

$$Z^*(t) = S(t)\Psi(Y, t) + M(t)N(t), \qquad (5)$$

$$Z^*(t) = S(t)\Psi(Y, t) + M(Y, t)N(t). \qquad (6)$$

В результате такой замены задача оптимальной нелинейной фильтрации с инерционным КН сведена к задаче нелинейной фильтрации при безынерционном КН. При этом $Z^*(t)$ следует считать в качестве новой наблюдаемой функции, для вычисления которой необходимо помимо процесса $Z(t)$ дополнительно иметь информацию о его производной $\dot{Z}(t)$.

Регистрируемый наблюдаемый процесс $Z(t)$ поступает на вход оптимального фильтра, который на рис. 1 обозначен блоком 3. На выходе фильтра требуется получить оптимальную оценку СП $Y(t)$ в виде функционала этих измерений:

$$\widehat{Y}(t) = F(Z,t).$$

Различные оптимальные оценки СП $Y(t)$ получают путем минимизации условного риска произвольных функций потерь от ошибки фильтрации. Ошибка фильтрации $E(t)$ определяется как разность между истинным значением вектора состояния $Y(t)$ и значением его оценки $\widehat{Y}(t)$:

$$E(t) = Y(t) - \widehat{Y}(t).$$

В качестве оптимальных оценок СП $Y(t)$ при наличии измерений $Z(t)$ чаще всего служат [3–9]:

условное математическое ожидание (МО)

$$\widehat{Y}(t) = \int_{R^N} y\, \widehat{\omega}(y,t \mid z)dy = \widehat{M}(t); \qquad (7)$$

мода

$$\widehat{Y}(t) = \arg\max_{y} \widehat{\omega}(y,t \mid z); \tag{8}$$

медиана (для одномерного СП)

$$\widehat{Y}(t) = \mathrm{Me}\, \widehat{\omega}(y,t \mid z) \tag{9}$$

при условии $\int\limits_{-\infty}^{\mathrm{Me}\,\widehat{\omega}(y,t|z)} \widehat{\omega}(y,t \mid z)dy = \int\limits_{\mathrm{Me}\,\widehat{\omega}(y,t|z)}^{+\infty} \widehat{\omega}(y,t \mid z)dy = \frac{1}{2}$.

В теории оптимальной нелинейной фильтрации показано, что наиболее полной вероятностной характеристикой ФП $Y(t)$ в момент времени t при наличии измерений вектора $Z(\tau)$ на интервале (t_0,t) является АПРВ $\widehat{\omega}(y,t \mid z)$ для $t_0 \le \tau \le t$, которую обозначим следующим образом:

$$\widehat{\omega}(y,t \mid Z(t), t_0 \le \tau \le t) = \widehat{\omega}(y,t).$$

Уравнение для АПРВ $\widehat{\omega}(y,t)$ впервые было получено Р.Л. Стратоновичем [5]. В симметризованной форме данное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \widehat{\omega}(y,t)}{\partial t} = -\sum_{p=1}^{N_Y} \frac{\partial}{\partial y_p}\left[A_p(y,t)\widehat{\omega}(y,t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{p,k=1}^{N_Y} \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_k}\left[B_{pk}(y,t)\widehat{\omega}(y,t)\right] - \\ -\left[f(y,z,t) - \left\langle f(y,z,t)\right\rangle\right]\widehat{\omega}(y,t), \tag{10}$$

где $A_p(y,t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left\langle \frac{\Delta Y_p(t)}{\Delta t} \middle| y,t \right\rangle$ – p-я компонента вектора сноса $A(y,t)$, характеризующая среднее значение локальной скорости p-й фазовой координаты ФП $Y(t)$; $B_{pk}(y,t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left\langle \frac{\Delta Y_p(t)\Delta Y_k(t)}{\Delta t} \middle| y,t \right\rangle$ – pk-я компонента диффузионной матрицы $B(y,t)$, характеризующая скорость изменения условного корреляционного момента p-й и k-й фазовых координат ФП $Y(t)$; $\Delta Y_p(t) = Y_p(t+\Delta t) - Y_p(t)$ – величина локального смещения фазовой координаты Y_p за малый промежуток времени Δt; $\langle \cdot | y,t \rangle$ – операция статистического усреднения при условии, что в момент времени t векторный ФП $Y(t)$ принимал значение y; $f(y,z,t)$ – производная от натурального логарифма функции правдоподобия, определяющая обновляющий процесс и задаваемая выражением (зависимость от t для краткости здесь и в ряде выражений ниже не указана)

$$f(y,z) = \frac{1}{2}\sum_{r,n=1}^{N_Z} \frac{R_{r,n}}{|Q|} \left[z_r - \sum_{i=1}^{N_\Psi} s_{ri}\psi_i(y) \right] \left[z_n - \sum_{j=1}^{N_\Psi} s_{nj}\psi_j(y) \right], \tag{11}$$

в котором $|Q| = \det Q(t)$ – определитель матрицы $Q(t)$; $R_{r,n}$ – алгебраическое дополнение элемента $Q_{r,n}$ в матрице интенсивностей шумов в КН $Q(t)$; $\langle f(y,z,t) \rangle = \int\limits_{R^{N_Y}} f(y,z,t)\hat{\omega}(y,t)dy$ – усреднение $f(y,z,t)$ по АПРВ ФП $Y(t)$.

В отличие от уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [2, 4], используемого при статистическом анализе ДСФС, уравнение Стратоновича (10) является стохастическим, так как в нем присутствуют шумы КН, нелинейным относительно АПРВ из-за наличия в нем слагаемого вида $\langle f(y,z,t) \rangle \hat{\omega}(y,t)$ и интегро-дифферен–циальным уравнением (ИДУ) в частных производных.

Для нахождения решения уравнения Стратоновича его следует интегрировать при заданном начальном распределении $\hat{\omega}(y,t_0) = \omega_0(y)$ с учетом нулевых граничных условий на бесконечности: $\hat{\omega}(\infty,t) = 0$.

Зная АПРВ, можно получить любые виды оптимальных оценок ФП $Y(t)$ [2–9, 11, 12, 23]. Однако аналитическое решение уравнения Стратоновича (10) удается получить только в ряде частных случаев [3, 4, 6, 8, 9, 24]. Поэтому в современной теории оптимальной нелинейной фильтрации учет негауссового характера АПРВ ФП $Y(t)$ осуществляется путем расчета апостериорных кумулянтов [3, 4, 8, 9, 17–20]. Однако уравнения для апостериорных кумулянтов являются чрезвычайно сложными и громоздкими. Их решение в реальном масштабе времени возможно при оценке негауссовых СП с малой размерностью фазового пространства. Поэтому требуется получить уравнения для АЦМ в общем случае произвольного R-го порядка для негауссового ФП $Y(t)$, как это было сделано при высокоточном анализе стохастических динамических систем в [25]. При этом, исходя из вида ММ ФП (четыре типа) и КН (семь типов), а также наличия или отсутствия зависимости (корреляции) их шумов, можно выделить восемь основных (базовых) и двадцать дополнительных вариантов задач оптимальной нелинейной фильтрации непрерывных СП.

Первая задача – фильтрация многомерного негауссового СП с аддитивными шумами вида (1) безынерционным нелинейным КН с аддитивными шумами вида (2).

Вторая задача – фильтрация многомерного негауссового СП с аддитивными шумами безынерционным нелинейным КН с аддитивными и (или) мультипликативными шумами.

Третья задача – фильтрация многомерного негауссового СП с аддитивными и (или) мультипликативными шумами безынерционным нелинейным КН с аддитивными шумами.

Четвертая задача – фильтрация многомерного негауссового СП с аддитивными и (или) мультипликативными шумами безынерционным нелинейным КН с аддитивными и (или) мультипликативными шумами.

Пятая задача фильтрации по постановке совпадает с первой, шестая – со второй, седьмая – с третьей, восьмая – с четвертой, но отличается наличием инерционного КН.

В данной статье рассматривается общая методология высокоточной нелинейной фильтрации, которая может применяться для всех восьми основных (базовых) вариантов задач фильтрации, а инженерные расчетные алгоритмы приведены только для первой задачи фильтрации. Общая методология и расчетные алгоритмы изложены на основе работы [26] с небольшими коррективами, а во второй части статьи они сравниваются с алгоритмами, построенными на основе метода статистического моделирования.

Методика высокоточной оптимальной нелинейной фильтрации

Данная методика включает следующие восемь основных этапов.

1. Получение универсальных стохастических ИДУ для АЦМ произвольного R-го порядка ФП $Y(t)$, описываемого системой СДУ вида (1).

2. Получение развернутой системы стохастических ИДУ для АЦМ требуемого порядка исходя из конкретного вида ММ ФП $Y(t)$ и КН $Z(t)$.

3. Получение развернутой системы СДУ для АЦМ требуемого порядка путем раскрытия усреднений в соответствующих стохастических ИДУ с использованием метода статистической аппроксимации нелинейностей.

4. Получение уравнений связи АЦМ произвольного порядка с

апостериорными кумулянтами для ФП $Y(t)$.

5. Получение усеченной (ограниченной) и замкнутой системы СДУ для учитываемых итерационным образом АЦМ ФП $Y(t)$.

6. Выбор критерия оптимальности фильтрации негауссовых СП и составление алгоритмов работы (синтез) высокоточных нелинейных фильтров.

7. Определение при необходимости недостающих начальных условий для интегрирования замкнутой системы СДУ для учитываемых итерационным образом АЦМ ФП $Y(t)$.

8. Численное интегрирование на ЭВМ системы СДУ для учитываемых АЦМ, уточнение алгоритмов фильтрации и получение оптимальных оценок ФП $Y(t)$ в реальном масштабе времени.

В первой части статьи подробно рассмотрены три из восьми этапов методики высокоточной фильтрации СП, наблюдаемых в ДСФС. Во второй части статьи раскрыто содержание оставшихся этапов методики.

На первом этапе методики необходимо получить универсальные стохастические ИДУ для АЦМ произвольного R-го порядка многомерного негауссового ФП $Y(t)$. Для этого запишем определение АЦМ произвольного R-го порядка $\mu_{r_1,r_2,\ldots,r_R}$ в следующем виде:

$$\widehat{\mu}_{r_1 r_2 \ldots r_R} \stackrel{\Delta}{=} \left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_1} \overset{\circ}{Y}_{r_2} \ldots \overset{\circ}{Y}_{r_R} \right\rangle \stackrel{\Delta}{=} \int\limits_{R^{N_Y}} (y_{r_1} - \widehat{M}_{r_1}) \ldots (y_{r_R} - \widehat{M}_{r_R}) \widehat{\omega}(y) dy, \qquad (12)$$

где $\stackrel{\Delta}{=}$ означает равенство по определению; $\overset{\circ}{Y}_r = y_r - \widehat{M}_r$ – центрированное значение r-й ($r = \overline{1, N_Y}$) фазовой координаты (компоненты) ФП $Y(t)$; $\widehat{M}_r$ – апостериорное МО

r-й фазовой координаты ФП $Y(t)$.

Дифференцируя выражение (12) по аргументу t как сложную функцию, подставляя вместо производной АПРВ ее значение из уравнения (10) и вычисляя полученные при этом интегралы, получим универсальное стохастическое ИДУ для АЦМ произвольного R-го порядка ФП $Y(t)$ вида

$$\dot{\hat{\mu}}_{r_1\ldots r_R} = \sum_{q=1}^{R}\left\langle A_{r_q}(Y)\left(\overset{\circ}{Y}_{r_1}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_{q-1}}\overset{\circ}{Y}_{r_{q+1}}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_R} - \hat{\mu}_{r_1\ldots r_{q-1}r_{q+1}\ldots r_R}\right)\right\rangle +$$
$$+\sum_{q=1}^{R}\sum_{s=1+q}^{R}\left\langle B_{r_q r_s}(Y)\overset{\circ}{Y}_{r_1}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_{q-1}}\overset{\circ}{Y}_{r_{q+1}}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_{s-1}}\overset{\circ}{Y}_{r_{s+1}}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_R}\right\rangle +$$
$$+\sum_{q=1}^{R}\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q} f(Y,z)\right\rangle \hat{\mu}_{r_1\ldots r_{q-1}r_{q+1}\ldots r_R} + \hat{\mu}_{r_1\ldots r_R}\left\langle f(Y,z)\right\rangle - \left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_1}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_R} f(Y,z)\right\rangle. \quad (13)$$

Отметим, что уравнение (13) содержит три группы усреднений, содержащих коэффициенты сноса $A_{r_q}(y,t)$, коэффициенты диффузии $B_{r_q r_s}(y,t)$ и обновляющий процесс.

С использованием мультииндексов [27, 28] уравнение (13) можно представить в более компактном виде

$$\dot{\hat{\mu}}_{\bar{r}} = \sum_{q=1}^{R}\left\langle A_{r_q}(Y)\left(\overset{\circ}{Y}_{\bar{r}(q)} - \mu_{\bar{r}(q)}\right)\right\rangle + \sum_{q=1}^{R}\sum_{s=1+q}^{R}\left\langle B_{r_q r_s}(Y)\overset{\circ}{Y}_{\bar{r}(q,s)}\right\rangle -$$
$$-\left\langle\left(\overset{\circ}{Y}_{\bar{r}} - \mu_{\bar{r}} - \sum_{q=1}^{R}\overset{\circ}{Y}_{\bar{r}(q)}\,\mu_{\bar{r}(q)}\right) f(Y,z)\right\rangle, \quad (14)$$

где $\bar{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_R)$ – мультииндекс (векторный индекс); $\bar{r}(q) = (r_1, \ldots, r_{q-1}, r_{q+1}, \ldots, r_R)$ – мультииндекс, полученный из мультииндекса $\bar{r}$ исключением q-го индекса; $\bar{r}(q,s)$ – мультииндекс, полученный из мультииндекса $\bar{r}$ исключением q-го и s-го индексов; $\overset{\circ}{Y}_{\bar{r}(q)} = \overset{\circ}{Y}_{r_1}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_{q-1}}\overset{\circ}{Y}_{r_{q+1}}\ldots\overset{\circ}{Y}_{r_R}$ – произведение центрированных значений фазовых координат, соответствующих мультииндексу $\bar{r}(q)$; $\overset{\circ}{Y}_{\bar{r}(q,s)} = \overset{\circ}{Y}_{r_1} \ldots \overset{\circ}{Y}_{r_{q-1}} \overset{\circ}{Y}_{r_{q+1}} \ldots \overset{\circ}{Y}_{r_{s-1}} \overset{\circ}{Y}_{r_{s+1}} \ldots \overset{\circ}{Y}_{r_R}$ – произведение центрированных значений фазовых координат, соответствующих мультииндексу $\bar{r}(q,s)$; $\hat{\mu}_{\bar{r}} = \hat{\mu}_{r_1 \ldots r_R}$ – АЦМ произвольного R-го порядка; $\hat{\mu}_{\bar{r}(q)} = \hat{\mu}_{r_1 \ldots r_{q-1} r_{q+1} \ldots r_R}$ – АЦМ (R–1)-го порядка, соответствующий мультииндексу $\bar{r}(q)$; R – порядок АЦМ ФП $Y(t)$.

Отметим, что уравнения вида (13), (14) являются универсальными ИДУ, так как в них производные АЦМ не зависят от конкретного вида ММ ФП и КН, а выражены через их обобщенные характеристики, т.е. через компоненты вектора сноса $A(y,t)$, элементы матрицы диффузии $B(y,t)$ и функцию $f(y,z,t)$.

Уравнения вида (13), (14) являются более простыми по сравнению с известными уравнениями для апостериорных кумулянтов, они позволяют учесть негауссовый характер АПРВ при порядке учитываемого ЦМ R>2.

На втором этапе методики требуется получить развернутую систему стохастических ИДУ для АЦМ ФП исходя из конкретного вида ММ ФП и КН. Для этого необходимо выполнить следующие четыре подэтапа:

1) записать по известной методике [2–4, 8, 9, 25] выражения для коэффициентов сноса $A_p(y,t)$ и диффузии $A_{pk}(y,t)$ для заданного класса ММ ФП $Y(t)$;

2) записать выражение для функции $f(y,z,t)$ для заданного класса ММ КН (см. формулы (2)–(6));

3) в универсальных стохастических ИДУ для АЦМ (13), (14) преобразовать все усреднения типа $\left\langle \overset{\circ}{Y} \, f(Y,z,t) \right\rangle$ и т.д., содержащие обновляющий процесс, к

удобному алгоритмическому виду;

4) подставить полученные выражения для коэффициентов сноса, коэффициентов диффузии и усреднений, содержащих обновляющий процесс, в универсальные стохастические ИДУ (13), (14).

Для получения инженерных расчетных алгоритмов представим уравнение (1) в покомпонентном виде

$$\dot{Y}_p(t)=c_p(t)+\sum_{j=1}^{N_Y} d_{pj}(t)Y_j(t)+\sum_{j=1}^{N_\Phi} b_{pj}(t)\varphi_j(Y,t)+\sum_{m=1}^{N_V} h_{pm}(t)V_m(t),\quad p=\overline{1,N_Y}. \tag{15}$$

Для нелинейной наблюдаемой системы (негауссового ФП), описываемой системой СДУ (15), коэффициенты сноса и диффузии запишутся так [2–4, 8, 9, 25]:

$$A_p(y,t)=c_p(t)+\sum_{i=1}^{N_Y} d_{pi}(t)y_i+\sum_{j=1}^{N_\Phi} b_{pj}(t)\varphi_j(y,t), \tag{16}$$

$$B_{pk}(y,t)=\sum_{l,q=1}^{N_V} h_{pl}(t)G_{lq}(t)h_{kq}(t). \tag{17}$$

Математическую модель безынерционного нелинейного КН с аддитивным гауссовым БШ вида (2) также представим в покомпонентном виде

$$Z_p(t)=\sum_{j=1}^{N_\Psi} s_{pj}(t)\psi_j(Y,t)+\sum_{i=1}^{N_Z} m_{pi}(t)N_i(t),\quad p=\overline{1,N_Z}. \tag{18}$$

На основании формул (11) и (18) выражение для функции $f(y,z,t)$ будет иметь вид

$$f(y,z)=\frac{1}{2}\sum_{r,n=1}^{N_Z}\frac{R_{r,n}}{|Q|}\left[z_r z_n - z_r\sum_{j=1}^{N_\Psi} s_{nj}\psi_j(y) - z_n\sum_{i=1}^{N_\Psi} s_{ri}\psi_i(y)+\sum_{i,j=1}^{N_\Psi} s_{ri}s_{nj}\psi_i(y)\psi_j(y)\right]. \tag{19}$$

Далее в уравнениях (13) и (14) все усреднения, содержащие обновляющий процесс, необходимо преобразовать к удобному алгоритмическому виду.

Усреднение от обновляющего процесса, входящее в общее универсальное стохастическое ИДУ вида (14), преобразуем так:

$$\widehat{f}(z)=\left\langle \left(\sum_{q=1}^{R}\widehat{\mu}_{\bar r(q)}\overset{\circ}{Y}_{r_q}+\widehat{\mu}_{\bar r}-\overset{\circ}{Y}_{\bar r}\right) f(Y,z)\right\rangle=\sum_{q=1}^{R}\widehat{\mu}_{\bar r(q)}\left\langle \overset{\circ}{Y}_{\bar r}\; f(Y,z)\right\rangle+\widehat{\mu}_{\bar r}\left\langle f(Y,z)\right\rangle-\left\langle \overset{\circ}{Y}_{\bar r}\; f(Y,z)\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r,n=1}^{N_Z}\frac{R_{r,n}}{|Q|}\left\{\sum_{q=1}^{R}\widehat{\mu}_{\bar r(q)}\left[-z_r\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q}\sum_{j=1}^{N_\Psi}s_{nj}\psi_j(Y)\right\rangle-z_n\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q}\sum_{i=1}^{N_\Psi}s_{ri}\psi_i(Y)\right\rangle+\right.\right.$$

$$\left.+\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q}\sum_{i,j=1}^{N_\Psi}s_{ri}s_{nj}\psi_i(Y)\psi_j(Y)\right\rangle\right]+z_r\left\langle (\overset{\circ}{Y}_{\bar r}-\widehat{\mu}_{\bar r})\sum_{j=1}^{N_\Psi}s_{nj}\psi_j(Y)\right\rangle+$$

$$\left.+z_n\left\langle (\overset{\circ}{Y}_{\bar r}-\widehat{\mu}_{\bar r})\sum_{i=1}^{N_\Psi}s_{ri}\psi_i(Y)\right\rangle-\left\langle (\overset{\circ}{Y}_{\bar r}-\widehat{\mu}_{\bar r})\sum_{i,j=1}^{N_\Psi}s_{ri}s_{nj}\psi_i(Y)\psi_j(Y)\right\rangle\right\}. \qquad (20)$$

Раскрытие усреднений от обновляющего процесса для инерционного КН с аддитивным БШ вида (3) также осуществляется в соответствии с выражением (20), но только с заменой Z на Z^*.

Далее, подставляя полученные выражения для коэффициентов сноса (16), матрицы диффузии (17) и усреднений от обновляющего процесса в общее универсальное стохастическое ИДУ (14), получим следующую развернутую систему стохастических ИДУ для АЦМ произвольного R-го порядка ФП:

$$\dot{\widehat{\mu}}_{\bar r}=\sum_{q=1}^{R}\sum_{j=1}^{N_Y}d_{qj}\widehat{\mu}_{j\bar r(q)}+\sum_{q=1}^{R}\sum_{j=1}^{N_\Phi}\left[b_{qj}\left\langle\varphi_j(Y)(\overset{\circ}{Y}_{\bar r(q)}-\widehat{\mu}_{\bar r(q)})\right\rangle\right]+\sum_{l,q=1}^{N_V}G_{lq}\sum_{n=1}^{R}\sum_{s=n+1}^{R}h_{r_n l}h_{r_s q}\widehat{\mu}_{\bar r(n,s)}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r,n=1}^{N_Z}\frac{R_{r,n}}{|Q|}\left\{\sum_{q=1}^{R}\widehat{\mu}_{\bar r(q)}\left[-z_n\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q}\sum_{j=1}^{N_\Psi}s_{nj}\psi_j(Y)\right\rangle-z_r\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q}\sum_{i=1}^{N_\Psi}s_{ri}\psi_i(Y)\right\rangle+\right.\right.$$

$$\left.+\left\langle \overset{\circ}{Y}_{r_q}\sum_{i,j=1}^{N_\Psi}s_{ri}s_{nj}\psi_i(Y)\psi_j(Y)\right\rangle+z_r\left\langle (\overset{\circ}{Y}_{\bar r}-\widehat{\mu}_{\bar r})\sum_{j=1}^{N_\Psi}s_{nj}\psi_j(Y)\right\rangle+\right.$$

$$+z_n\left\langle (\overset{\circ}{Y}_{\bar r}-\widehat{\mu}_{\bar r})\sum_{i=1}^{N_\Psi}s_{ri}\psi_i(Y)\right\rangle-\left\langle (\overset{\circ}{Y}_{\bar r}-\widehat{\mu}_{\bar r})\sum_{i,j=1}^{N_\Psi}s_{ri}s_{nj}\psi_i(Y)\psi_j(Y)\right\rangle, \qquad (21)$$

где $j\bar{r}(q)=(j,r_1,...,r_{q-1},r_{q+1},...,r_R)$ – мультииндекс, полученный из мультииндекса $\bar{r}$ исключением q-го индекса и добавления j-го индекса; $\hat{\mu}_{j\bar{r}(q)}$ – АЦМ R-го порядка, соответствующий мультииндексу $j\bar{r}(q)$.

Развернутое уравнение вида (21) также является стохастическим ИДУ. Оно содержит в правой части усреднения по АПРВ от различных нелинейных функций и на его основе получены уравнения для АЦМ до 6-го порядка включительно.

На третьем этапе методики раскрывая все усреднения в правых частях уравнений, найденных из (21) для первых четырех порядков, получаем СДУ для АЦМ ФП $Y(t)$.

Наиболее эффективно раскрытие этих усреднений можно осуществить с использованием метода статистической аппроксимации произвольных нелинейностей, разработанного И.М. Косачевым и М.Г. Ерошенковым [25]. Суть данного метода состоит в расчете усреднений от произвольной нелинейной функции $\varphi(Y)$ как взвешенной суммы значений этой же нелинейной функции в некоторых специальных точках, называемых узлами аппроксимации, выбор которых определяется текущими значениями рассчитываемых АЦМ – аргументов нелинейности. При разработке метода статистической аппроксимации также комплексно использовались идеи других методов, в частности моментно-семиинвариантного [18, 19], нормальной аппроксимации ПРВ, функциональных рядов [3, 4, 6], эквивалентных возмущений [3], интерполяционного [2], ортогональных разложений ПРВ [4, 6], разложения нелинейности в обобщенный ряд Тейлора и его экономизации на основе квадратурных формул Гаусса–Эрмита [29–

31].

В простейшем случае для одноаргументных нелинейностей $\varphi(Y)$ при гауссовой ПРВ аргумента нелинейности раскрытие усреднений в уравнениях, найденных из (21) для первых четырех порядков, осуществляется по формуле

$$\langle \varphi(Y) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(Y)\hat{\omega}(y)dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\hat{M}_y + \hat{\sigma}_y u_i), \tag{22}$$

где $\hat{M}_y, \hat{\sigma}_y$ – апостериорные МО и среднеквадратическое отклонение аргумента нелинейности $\varphi(Y)$ соответственно; λ_i – весовые коэффициенты (веса) аппроксимации; u_i – узлы аппроксимации.

Значения весовых коэффициентов и узлов аппроксимации произвольных нелинейностей приведены в [25, 26]. Также в [25] доказано, что предложенная n-точечная статистическая аппроксимация нелинейностей вида (24) абсолютно точна на полиномах степени ($2n$–1). Это позволяет рассчитать необходимое число точек аппроксимации n нелинейности $\varphi(Y)$, при которых обеспечивается нулевая ошибка $n = (C_n + 1)/2$, где C_n – максимальная степень полинома нелинейности $\varphi(Y)$.

При негауссовой ПРВ аргумента нелинейности $\varphi(Y)$ раскрытие усреднений в уравнении (21) осуществляется по формуле

$$\langle \varphi(Y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* \varphi(\hat{M}_y + \hat{\sigma}_y u_i^*), \tag{23}$$

где λ_i^*, u_i^* – уточненные значения узлов и весов соответственно из-за негауссового характера АПРВ аргумента нелинейности $\varphi(Y)$, определяемые согласно данным из [25, 26].

Раскрытие усреднения от произвольной многоаргументной нелинейной функции $\varphi(Y)$ как при гауссовой, так и при произвольной многомерной АПРВ ФП $Y(t)$ и независимых аргументах нелинейности осуществляется по формуле (N – размерность Y):

$$\langle \varphi(Y) \rangle = \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_N=1}^{n_N} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_N} \varphi(\widehat{M}_1 + \widehat{\sigma}_1 u_{i_1}, \ldots, \widehat{M}_N + \widehat{\sigma}_N u_{i_N}). \tag{24}$$

В частном случае, когда многоаргументная нелинейность представляет собой произведение одноаргументных нелинейностей:

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_N) = \prod_{i=1}^{N} \varphi_i(y_i), \tag{25}$$

формула (24) преобразуется в следующее выражение:

$$\langle \varphi(Y_1, \ldots, Y_N) \rangle = \prod_{k=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_k (\widehat{M}_k + \widehat{\sigma}_k u_i) \right]. \tag{26}$$

Если в многоаргументной нелинейности $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ ее аргументы являются зависимыми или (и) имеют негауссовое распределение, то усреднение от такой нелинейности также производится по формулам (24)–(26).

При использовании модифицированного моментно-семиинвариантного метода, основанного на предположении о малости смешанных кумулянтов выше второго порядка, исходную многоаргументную АПРВ можно представить разложением в ряд по одномерным апостериорным ПРВ [32]:

$$\widehat{\omega}(y_1, y_2, \ldots y_N) = \prod_{i=1}^{N} \widehat{\omega}_i(y_i) \left[1 + \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{\widehat{D}_{pq}}{\widehat{D}_{pp} \widehat{D}_{qq}} \overset{\circ}{y}_p \overset{\circ}{y}_q \right]. \tag{27}$$

Такое представление исходной многоаргументной АПРВ аргументов усредняемой нелинейности позволяет учесть взаимосвязи аргументов нелинейности только с точностью до взаимных корреляционных моментов. Тогда с учетом (27) на основании (24) раскрытие усреднения от произвольной многоаргументной нелинейности можно рассчитать по более простой формуле:

$$\left\langle \varphi(Y_1,...,Y_N)\right\rangle = \sum_{i_1=1}^{n_1}...\sum_{i_N=1}^{n_N}\lambda_{i_1}...\lambda_{i_N}\varphi(\widehat{M}_1+\widehat{\sigma}_1 u_{i_1},...,\widehat{M}_N+\widehat{\sigma}_N u_{i_N})\left(1+\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{q=p+1}^{N}\hat{\rho}_{pq}u_{ip}u_{iq}\right), \quad (28)$$

где $\hat{\rho}_{pq}=\dfrac{\widehat{D}_{pq}}{\sqrt{\widehat{D}_{pp}}\sqrt{\widehat{D}_{qq}}}$ – коэффициент корреляции p-го и q-го аргументов нелинейности.

Во второй части статьи будет подробно изложено содержание остальных этапов данной методики, а также ее сравнение с алгоритмами, построенными на основе метода статистического моделирования.

Библиографический список

1. Колесников А.А. Современная и прикладная теория управления: Оптимизационный подход к теории управления в 3 ч. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – Ч. 1 - 407 с.; Ч. 2 - 558 с.; Ч. 3 - 653 с.

2. Егупов Н.Д. Методы классической и современной теории автоматического управления в 5 т. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. Т. 1 – 656 с.; Т. 2 - 640 с.; Т. 3 - 616 с.; Т. 4 - 744 с.; Т. 5 - 784 с.

3. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. – М.:

Наука, 1987. – 304 с.

4. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2004. – 1000 с.

5. Стратонович Р.Л. Условные марковские случайные процессы и их применение в теории оптимального управления. – М.: МГУ, 1966. – 319 с.

6. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007. – 776 с.

7. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

8. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. – М.: МГУ, 2009. – 88 с.

9. Гельфанд А.М., Хмельник С.И. Цифровая фильтрация многомерных взаимозависимых процессов. – М.: Дельфин-информатика, 2008. – 148 с.

10. Ширман Я.Д. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория – М.: Радиотехника, 2007. – 512 с.

11. Сосулин Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.

12. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008. – 312 с.

13. Бухалёв В.А., Болдинов В.А. Фильтрация сигналов при низкочастотных помехах в измерительно-информационных системах беспилотных летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 97. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=87283

14. Колосовская Т.П. Субоптимальный алгоритм оценивания и параметрической идентификации для навигационных систем летательных аппаратов и других

подвижных объектов на основе информации магнитного поля Земли // Труды МАИ. 2016. № 88. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=70666

15. Сычев М.И. Траекторная обработка радиолокационной информации на основе многомодельной фильтрации // Труды МАИ. 2016. № 90. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=74830

16. Сычев М.И., Фесенко С.В. Оценивание координат и параметров движения воздушных судов по информации от радиолокационных средств наблюдения // Труды МАИ. 2015. № 83. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=62280

17. Дашевский М.Л. Приближенный анализ точности нестационарных нелинейных систем методом семиинвариантов // Автоматика и телемеханика. 1967. № 11. С. 62 - 81.

18. Дашевский М.Л. Семиинвариантный метод замыкания уравнений для моментов в задачах анализа нелинейных систем // Проблемы управления и теория информации. 1975. № 4. С. 317 - 328.

19. Кашкарова А.Г., Шин В.И. Модифицированные семиинвариантные методы анализа стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1986. № 2. С. 69 - 79.

20.Малахов А.Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразования. – М.: Советское радио, 1978. – 376 с.

21. Соколов С.В. Использование негауссовых распределений при синтезе субоптимальных алгоритмов фильтрации // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1991. № 5. С. 8 - 11.

22. Рыбаков К.А. Спектральный метод фильтрации и прогнозирования в

стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. 2016. № 224 (2). С. 14 - 23.

23. Леондес К.Т. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. – М.: Наука, 1980. – 408 с.

24. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Рипол классик, 2013. – 684 с.

25. Косачев И.М., Ерошенков М.Г. Аналитическое моделирование стохастических систем. – Минск: Наука и техника, 1993. – 264 с.

26. Косачев И.М. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2014. № 4 (45). С. 125 - 161.

27.Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 496 с.

28. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1985. – 504 с.

29. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. Численные методы. Решение задач и упражнения. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 352 с.

30. Гателюк О.В., Исмаилов Ш.К., Манюкова Н.В. Численные методы. – М.: Юрайт, 2019. – 140 с.

31. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

32. Мальчиков С.В. Приближенный метод статистического анализа динамических систем, содержащих нелинейности мультипликативного типа // Автоматика и телемеханика. 1973. № 10. С. 33 - 38.