УДК 519.622.2, 532.507 DOI: 10.34759/trd-2020-112-1

О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца

Хатунцева О.Н.

Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва, ул. Ленина, 4А, Королев, Московская область, 141070, Россия

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Статья поступила 12.05.2020

Аннотация

Критериев устойчивости для систем автономных дифференциальных уравнений (САДУ), аналогичных критерию Куранта-Фридрихса-Леви, в настоящее время не существует. При численном интегрировании САДУ довольно часто сталкиваются с неустойчивостями, проявляющимися в виде вычислительного хаоса. Причем, уменьшение временного шага не приводит к устранению такой «неустойчивости». Обычно, для объяснения явления детерминированного хаоса приводятся исследования по определению чувствительности решений к точности задания начальных условий. Эти исследования показывают экспоненциальную расходимость изначально близких траекторий решений и невозможность подобрать столь малую достижимую погрешность вычисления, чтобы «победить» неопределенность в САДУ типа Лоренца.

Из этого делается заключение, что поскольку принципиальные трудности не позволяют достичь необходимой точности вычислений, то задумываться о

детерминированности не имеет смысла. Однако такой подход не решает проблему детерминированности решений безотносительно возможности или невозможности получения информации об эволюции рассматриваемой системы. С этими вопросами, в частности, сопрягаются вопросы предопределенности в замкнутых системах, в частности, в такой замкнутой системе, как Вселенная.

Проведенные в данной работе исследования показывают, что детерминированный хаос, возникающий в САДУ типа Лоренца, при задании **любого** конечного фиксированного шага по времени, вполне может быть ассоциирован со стохастическим процессом, а не являться, по сути, детерминированным хаосом.

В работе также обсуждаются вопросы, связанные с возможностью моделирования турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса с помощью метода прямого численного моделирования.

Ключевые слова: хаос, автономные дифференциальные уравнения, система уравнений Лоренца, стохастические системы, турбулентность.

1. Введение

Одним из основных критериев, определяющих связь между временными и пространственными шагами расчетной сетки, обеспечивающими устойчивость явного численного решения уравнений в частных производных (УЧП) гиперболического вида, является критерий Куранта-Фридрихса-Леви [1-2] (критерий КФЛ): $|u|\Delta t/\Delta x < C$. Он накладывает ограничения «сверху» на расчетный шаг по времени. Его физический смысл заключается в том, что частица за один шаг по времени не должно продвинуться дальше, чем на один пространственный шаг.

В некоторых задачах УЧП сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). В частных случаях, заменой производных более высокого порядка новыми переменными или другими искусственными приемами ОДУ и УЧП могут быть сведены к системам автономных дифференциальных уравнений (САДУ). Так известная САДУ Лоренца [3-6] была получена из уравнений Навье-Стокса (УНС), совместно с уравнением энергии, для задач конвекции.

Критериев устойчивости для САДУ, аналогичных критерию КФЛ, в настоящее время не существует. При численном интегрировании САДУ довольно часто сталкиваются с неустойчивостями, проявляющимися в виде вычислительного хаоса. Причем, уменьшение временного шага не приводит к устранению такой «неустойчивости» - свойство «хаотичности» проявляется на различных временных масштабах.

Для более подробного исследования этого явления, рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений, состоящую из N уравнений, где $N \geq 3$:

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1, x_2, ..., x_N\right), \quad i = 1,2,...N, \tag{1}$$

здесь каждая из N функций зависит от N переменных.

Условие совместности для уравнений, входящих в САДУ (1) на временном интервале: $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, можно представить в виде:

$$t_k - t_{k-1} = \int_{x_{1(k-1)}}^{x_{1(k)}} \frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, ..., x_N)} = \int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2(k)}} \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, ..., x_N)} = ... = \int_{x_{N(k-1)}}^{x_{1N(k)}} \frac{dx_N}{f_N(x_1, x_2, ..., x_N)}. \quad (2)$$

Свойство совместности для САДУ на любых двух соседних итерациях $(k-1)$ и (k) на временном интервале $t_{k-1} \le t \le t_k$ должно выполняться для значений функций при значениях аргументов, лежащих внутри области, ограниченной значениями координат: $\left(x_{1(k-1)}, x_{2(k-1)}, ..., x_{N(k-1)}\right)$ и $\left(x_{1(k)}, x_{2(k)}, ..., x_{N(k)}\right)$.

Дополняя в каждом интеграле пространство интегрирования до области $d\Omega = dx_1 dx_2 ... dx_N$, и одновременно дифференцируя подынтегральные выражения по недостающим переменным, соотношение (2) можно записать:

$$t_k - t_{k-1} = \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial^{N-1} f_1^{-1}}{\prod\limits_{j\ne 1}^{N-1} \partial x_j} d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial^{N-1} f_2^{-1}}{\prod\limits_{j\ne 2}^{N-1} \partial x_j} d\Omega = ... = \int_{\Delta\Omega} \frac{\partial^{N-1} f_N^{-1}}{\prod\limits_{j\ne N}^{N-1} \partial x_j} d\Omega.$$

Поскольку выполнение этого соотношения не должно зависеть от размера рассматриваемой области фазового пространства, то для достаточно гладких функций, в областях, где $f_j(x_1, x_2, ..., x_N) \ne 0$, должно выполняться условие:

$$\frac{\partial^{N-1} f_1^{-1}}{\prod\limits_{j\ne 1}^{N-1} \partial x_j} = \frac{\partial^{N-1} f_2^{-1}}{\prod\limits_{j\ne 2}^{N-1} \partial x_j} = ... = \frac{\partial^{N-1} f_N^{-1}}{\prod\limits_{j\ne N}^{N-1} \partial x_j}. \quad (3)$$

Если система обладает свойством ограниченности объема фазового пространства, то на достаточно длительных промежутках времени траектории решений будут проходить в окрестностях точек, принадлежащих другим траекториям (являющихся решениями САДУ при других начальных условиях). Причем размер таких окрестностей может быть сколь угодно мал, но конечен. Если условие (3) для САДУ не выполняется, то при переходе с одного итерационного шага на другой в те моменты, когда расстояние между траекториями оказывается меньше размера ячейки расчетной сетки, могут происходить “перескоки” с одной траектории решения на другую, порождая, при определенных условиях не просто вычислительный хаос, а вычислительную «стохастику» [7-8].

В тех случаях, когда в системе имеются еще и условия для экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий решений, в ней есть предпосылки к возникновению в качестве фазового портрета системы странного аттрактора.

2. Исследование возможности устранения вычислительной «стохастики» с помощью выбора величины временного шага на каждой итерации

В тех случаях, когда некоторые из N функций в САДУ зависят не от всех N переменных, на проблему совместности уравнений в такой системе можно посмотреть с точки зрения возможности «правильного» выбора величины временного шага на каждой итерации, позволяющего устранить вычислительную «стохастику».

Рассмотрим произвольный переход на двух соседних итерациях $(k-1)$ и (k): из точки с набором координат $\left(x_{1(k-1)}, x_{2(k-1)}, \ldots, x_{N(k-1)}\right)$ в точку с набором координат $\left(x_{1(k)}, x_{2(k)}, \ldots, x_{N(k)}\right)$. Допуская, что интервалы времени на разных итерационных шагах могут быть разными, попробуем ответить на вопрос: всегда ли существует возможность выбрать такие временные интервалы (возможно изменяющиеся от одной итерации к другой), чтобы условие совместности уравнений выполнялось на всех итерационных шагах?

Интегрирование каждого из уравнений в САДУ нужно проводить только по тем переменным, которые в него входят. А дополнять пространство до полного набора переменных, используемых в системе, нужно умножая и одновременно деля на одни и те же интервалы оставшихся переменных. При этом возникает возможность зафиксировать интервалы переменных, которые входят во все уравнения САДУ, и варьировать величины интервалов остальных переменных, пытаясь найти такой шаг по времени на каждой итерации, чтобы изменение фазового объема, описываемого каждым из уравнений САДУ, было согласованным.

Остановимся на одном частном случае, когда САДУ, состоит из трех автономных дифференциальных уравнений, два из которых являются функциями трех переменных, а одно – функцией двух переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varphi(x, y, z) \end{cases}. \tag{4}$$

Примером такой САДУ является система уравнений Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = g(x, y, z) = rx - xz - y \\ \dot{z} = \varphi(x, y, z) = xy - bz \end{cases}. \tag{5}$$

Определим временные интервалы, соответствующие каждому из уравнений системы (4), при условии малости фиксированного изменения объема фазового пространства за один временной шаг:

$$\begin{cases} \Delta t_x = \int\limits_{\Delta x \Delta y} \dfrac{\partial f^{-1}}{\partial y} dxdy \approx \dfrac{\partial f^{-1}}{\partial y} \Delta x \Delta y = \dfrac{1}{\Delta z} \dfrac{\partial f^{-1}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Delta t_y = \int\limits_{\Delta x \Delta y \Delta z} \dfrac{\partial^2 g^{-1}}{\partial x \partial z} dxdydz \approx \dfrac{\partial^2 g^{-1}}{\partial x \partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Delta t_z = \int\limits_{\Delta x \Delta y \Delta z} \dfrac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x \partial y} dxdydz \approx \dfrac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \end{cases}. \quad (6)$$

Поскольку число «пространственных» переменных, входящих в уравнения 1 и 2 или 1 и 3 системы (6), разное, то можно зафиксировать временной интервал для двух таких уравнений и найти значение интервала третьей «пространственной» переменной - Δz. Это можно сделать двумя способами.

Так, из требования равенства величины временных интервалов Δt_x и Δt_z в САДУ (6) можно получить условие для величины пространственного шага Δz:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y}{\partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y}. \quad (7)$$

Из равенства: $\dot{z} \approx \Delta z / \Delta t_z = \varphi(x, y, z)$ (см. последнее уравнение системы (4)) и уравнения (7), можно получить зависимость:

$$\Delta t_x = \Delta t_z \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y}{\varphi \cdot \partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y}. \quad (8)$$

И используя (7) и (8), из последнего уравнения системы (6) можно получить соотношение для произведения двух «пространственных» интервалов $\Delta x \Delta y$:

$$\Delta x \Delta y \approx \frac{1}{\varphi \cdot \partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y}. \tag{9}$$

Подставляя соотношения (9) и (7) во второе уравнение системы (6), можно найти значение временного интервала Δt_y:

$$\Delta t_y \approx \frac{\partial f^{-1}/\partial y \cdot \partial^2 g^{-1}/\partial x \partial z}{\varphi \cdot \left(\partial^2 \varphi^{-1}/\partial x \partial y\right)^2}. \tag{10}$$

Выражения (8) и (10) определяют первый возможный согласованный набор временных интервалов.

Вторым способом определить согласованные временные интервалы можно, приравняв величины временных интервалов Δt_x и Δt_y в САДУ (6). В результате можно получить условие для величины пространственного шага Δz:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f^{-1}/\partial y}{\partial^2 g^{-1}/\partial x \partial z}. \tag{11}$$

Из равенства: $\dot{z} \approx \Delta z / \Delta t_z = \varphi(x, y, z)$ (см. последнее уравнение системы (4)) и уравнения (11), можно получить зависимость:

$$\Delta t_z \approx \frac{\partial f^{-1}/\partial y}{\varphi \cdot \partial^2 g^{-1}/\partial x \partial z}. \tag{12}$$

И используя (11) и (12), из последнего уравнения системы (6) можно получить соотношение для произведения двух «пространственных» интервалов $\Delta x \Delta y$:

$$\Delta x \Delta y \approx \frac{1}{\varphi \cdot \partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y}. \tag{13}$$

Можно заметить, что произведения интервалов $\Delta x \Delta y$, описываемые выражениями (9) и (13), полученные двумя способами, полностью совпадают.

Подставляя соотношение (13) в первое уравнение системы (6), можно найти значения временных интервалов Δt_x и Δt_y:

$$\Delta t_x = \Delta t_y \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y}{\varphi \cdot \partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y}. \tag{14}$$

Выражения (12) и (14) определяют второй возможный согласованный набор временных интервалов.

Таким образом, для того чтобы на каждом итерационном шаге при численном интегрировании ***каждого*** из уравнений САДУ (4) «попадать» в одни и те же «пространственные» точки (на одни и те же «ветви» решения), избегая генерации стохастического процесса, необходимо задавать временные интервалы, описываемые выражениями (8) и (10) или (12) и (14). Однако при этом, во-первых, теряется понятие «абсолютного», независимого от рассматриваемого процесса, времени, а во-вторых, в общем случае отсутствует возможность устранения вычислительной «стохастики», поскольку, очевидно, что временные интервалы, задаваемые этими выражениями, не всегда поддаются согласованию (их не всегда можно приравнять друг другу). То есть, для пространств с размерностью не меньше трех, детерминированность процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, в общем случае отсутствует. В самом деле, если объективно фиксируется наступление какого-то процесса, описываемых САДУ, в «пространственных» точках, то «внутреннее» время в разных направлениях будет в общем случае «протекать» с разной скоростью.

Для иллюстрации неустранимости вычислительной «стохастики» при численном интегрировании САДУ определенного вида, рассмотрим систему уравнений Лоренца (5). Используя соотношения (8) и (10), найдем значения согласованных интервалов времени:

$$\Delta t_x = \Delta t_z \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y}{\varphi \cdot \partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y} = -\frac{(xy - bz)^2}{\sigma (y - x)^2 (xy + bz)}, \tag{15}$$

$$\Delta t_y \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y \cdot \partial^2 g^{-1} / \partial x \partial z}{\varphi \cdot \left(\partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y\right)^2} = \frac{(xy - bz)^5 (rx - xz + y)}{\sigma (y - x)^2 (xy + bz)^2 (rx - xz - y)^3}. \tag{16}$$

А, используя выражения (12) и (14), значения согласованных интервалов времени для САДУ Лоренца (5) можно записать в виде:

$$\Delta t_x = \Delta t_y \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y}{\varphi \cdot \partial^2 \varphi^{-1} / \partial x \partial y} = -\frac{(xy - bz)^2}{\sigma (y - x)^2 (xy + bz)}, \tag{17}$$

$$\Delta t_z \approx \frac{\partial f^{-1} / \partial y}{\varphi \cdot \partial^2 g^{-1} / \partial x \partial z} = -\frac{(rx - xz - y)^3}{\sigma (y - x)^2 (xy - bz)^2 (xz - rx - y)}. \tag{18}$$

Равенство временных интервалов по всем трем «пространственным» переменным, определяемых выражениями (17)-(18), в САДУ Лоренца может выполняться только на поверхностях, задаваемых уравнением:

$$\frac{(rx - xz - y)^3}{(xy - bz)^4 (xz - rx - y)} = \frac{1}{xy + bz}.$$

Из уравнений (17)-(18), в частности, видно, что интервалы времени могут быть, как положительными, так и отрицательными. То есть для согласованности уравнений, время в некоторых точках по некоторым «пространственным» направлениям должно протекать в противоположном направлении. Кроме того, у уравнений (17)-(18) существуют особенности – области «притяжения» или «отталкивания» на задаваемых ими поверхностях и кривых, при попадании на которые интервалы времени становятся либо бесконечными, либо нулевыми, соответственно.

Аналогичное заключение можно сделать для условия равенства временных интервалов по всем трем «пространственным» переменным, определяемых выражениями (15)-(16), в САДУ Лоренца.

Следовательно, подобрать в общем случае в процессе счета «правильные» конечные интервалы времени, одинаковые для всех уравнений на одном и том же итерационном шаге, в САДУ Лоренца не удастся.

Автономные дифференциальные уравнения являются моделью для довольно большого класса явлений. В частности, к САДУ сводятся уравнения движения тел в гравитационных полях других тел. И, как известно, проблема даже трех гравитационно связанных тел в общем случае в настоящее время представляется неразрешимой в виде конечных аналитических выражений [9-10].

Обычно, для интерпретации явления детерминированного хаоса приводятся исследования по определению чувствительности решений к точности задания начальных условий. Эти исследования показывают экспоненциальную расходимость изначально близких траекторий решений и невозможность подобрать столь малую достижимую погрешность вычисления, чтобы «победить» неопределенность в САДУ типа Лоренца. Из этого делается заключение, что поскольку принципиальные трудности не позволяют достичь необходимой точности вычислений, то задумываться о детерминированности не имеет смысла. Однако такой подход не решает проблему детерминированности решений безотносительно возможности или невозможности получить информацию об эволюции рассматриваемой системы. С этими вопросами, в частности, сопрягаются вопросы предопределенности в замкнутых системах, в частности в такой замкнутой системе, какой является наша Вселенная.

Системы автономных дифференциальных уравнений должны подчиняться теореме Коши о существовании и единственности, и поэтому странные аттракторы, возникающие в фазовом пространстве в результате численного интегрирования САДУ типа уравнений Лоренца, обычно объясняют детерминированным хаосом, то есть сложным, но детерминированным поведением. Однако теорема Коши доказана для гадких решений, что не позволяет ее напрямую переносить на решения, найденными с использования хоть и малого, но конечного шага интегрирования.

Детерминированность подразумевает точное знание «координаты» точки в фазовом пространстве в фиксированный момент времени. Если же скорость процесса на произвольном итерационном шаге в разных «пространственных» направлениях принципиально не поддается согласованию на любом сколь угодно малом, но конечном временном интервале, то такой процесс нельзя считать детерминированным для направленного равномерного протекания времени. То есть такой процесс, по сути, является стохастическим процессом, а не детерминированным хаосом.

Принципиальное допущение возможности избавления от «стохастики» в таком процессе, вероятно, возможно только в случае, если любые взаимодействия в системе можно свести к рассмотрению на ***бесконечно*** малых масштабах, что в реальности невозможно, хотя бы из-за конечности размеров взаимодействующих объектов, например, гравитационно взаимодействующих тел, элементарных частиц, или условия ограничения масштабов протекания процессов планковским масштабом, на котором перестает существовать смысл самого понятия «пространства». Возможно, здесь также уместно вспомнить парадокс Зенона, утверждающий, что Ахиллес никогда не догонит черепаху, в случае пренебрежения реальных размеров бегунов.

В качестве практических приложений, рассмотренные процессы, описываемые САДУ, вероятно, могут быть использованы для генерации шума.

3. Нахождение фрактальной размерности странного аттрактора системы автономных дифференциальных уравнений Лоренца.

Как было сказано выше, в тех случаях, когда в САДУ не выполняется условие совместности уравнений и, при этом, помимо условия ограниченности фазового пространства имеются еще и условия для экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий решений, в ней есть предпосылки к появлению странного аттрактора – объекта, имеющего фрактальную структуру.

Всеми перечисленными свойствами обладает система автономных дифференциальных уравнений Лоренца (5). Математическое моделирование САДУ Лоренца [4-6] показывает наличие такого аттрактора в ней. Его фрактальная размерность, найденная эмпирическими методами, составляет, примерно, *2,06*.

Используя идеологию исследования САДУ, представленную выше и, в частности, систему уравнений (6), попытаемся определить фрактальную размерность странного аттрактора САДУ Лоренца аналитически. Для этого запишем выражение для пространственного интервала в трехмерном пространстве на заданном итерационном шаге:

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{19}$$

Учитывая (5)-(6), можно записать

$$\begin{cases} \Delta x \approx \dot{x}\Delta t_x = \dfrac{f(x,y)}{\Delta z}\dfrac{\partial f^{-1}}{\partial y}\Delta\Omega \\ \Delta y \approx \dot{y}\Delta t_y = g(x,y,z)\dfrac{\partial^2 g^{-1}}{\partial x \partial z}\Delta\Omega \\ \Delta z \approx \dot{z}\Delta t_z = \varphi(x,y,z)\dfrac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x \partial y}\Delta\Omega \end{cases}, \quad \text{где} \quad \Delta\Omega = \Delta x \Delta y \Delta z. \tag{20}$$

Подставляя выражения (20) в соотношение (19), и учитывая, что $\Delta l / \Delta\Omega \approx dl / d\Omega$, запишем

$$\left(\frac{dl}{d\Omega}\right)^2 \approx \left(\frac{f}{\Delta z}\frac{\partial f^{-1}}{\partial y}\right)^2 + \left(g\frac{\partial^2 g^{-1}}{\partial x \partial z}\right)^2 + \left(\varphi\frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x \partial y}\right)^2. \tag{21}$$

Подставляя в выражение (21) значения функций и значения производных, найденными на основе записи системы уравнений (5), выражение (21) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{dl}{d\Omega}\right)^2 \approx \frac{1}{(x-y)^2(\Delta z)^2} + \frac{(rx+y-xz)^2}{(rx-y-xz)^4} + \frac{(xy+bz)^2}{(xy-bz)^4}. \tag{22}$$

Поскольку геометрия странного аттрактора является фрактальной, то выражение для его объема (в случае рассмотрения ограниченного диапазона масштабов) должно быть представимо в виде: $\Omega = kl^D + c$, где D – значение фрактальной размерности, k, c - константы [11-12]. Поэтому, левая часть выражения (22) будет равна: $l^{2-2D} / (kD)^2$.

Выберем кривую, на которой правая часть выражения (22) будет зависеть только от одной переменной *z*. Для этого найдем кривую, являющуюся пересечением поверхностей, на которой последние два слагаемых в выражении (22) равны нулю: $y = xz - rx = -b\,z/x$, следовательно, $x = \pm\sqrt{b\,z/(r-z)}$ и $(x-y)^2 = bz\left(2 + r - z + 1/(r-z)\right)$. Таким образом на выбранной траектории будет выполняться соотношение:

$$l^{2-2D} \approx \frac{k^2 D^2 (r-z)}{(\Delta z)^2\, bz(1+r-z)^2}. \tag{23}$$

На заданной кривой можно записать:

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{bz}{r-z} + bz(r-z) + z^2 = \frac{bz(1+r-z)^2}{r-z} + z^2 - 2bz.$$

То есть, $\dfrac{bz(1+r-z)^2}{r-z} = l^2 - z^2 + 2bz$.

Сеточный шаг Δz, входящий в выражение (23), может быть задан произвольно – является параметром, а выражение $bz(1+r-z)^2/(r-z)$ можно ассоциировать с квадратом длины пути l^2, заданном на пересечении плоскостей в трехмерном фазовом пространстве в окрестности фиксированных значений *z*: *z=0* и *z=2b*, или в случае, когда $l^2 >> z^2 - 2bz$.

Таким образом, несложно заметить, что в этих случаях уравнение (23) для определения дробной размерности странного аттрактора САДУ Лоренца примет вид: $l^{2-2D} \sim l^{-2}$. Откуда следует значение фрактальной размерности: *D~2*, что очень близко к эмпирически найденному значению *2,06*.

4. Исследование возможности моделирования турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса с помощью метода прямого численного моделирования.

Все вопросы, относящиеся к возможности корректного описания турбулентности, являются чрезвычайно важными, поскольку от ответа на них зависит возможность разработки универсального подхода к решению огромного количества практических задач [13-34].

К свойству стохастичности уравнений Лоренца прибегают, в том числе, в тех случаях, когда хотят объяснить возможность описания турбулентных (стохастических) режимов течения жидкости с помощью детерминированных уравнений Навье-Стокса на основе метода прямого численного моделирования [3], [35].

Однако здесь возникает интересный аспект, на который часто не обращают внимания. Выход на турбулентный режим течения при использовании метода прямого численного моделирования не возможен без специального приема – задания гармонических граничных условий в поле течения.

Для того чтобы объяснить этот эффект сначала необходимо вспомнить, что стохастические системы могут различаться тем, что распределения и плотности вероятности реализации случайной величины в них могут быть, как стационарными, так и нестационарными (изменяющимися со временем).

Примером стационарной стохастической системы может служить система, находящаяся в равновесном термодинамическом состоянии, в которой молекулы совершают броуновское - стохастическое блуждание. В такой системе среднее значение кинетической энергии молекул сохраняется во времени и характеризуется температурой данной системы. Постоянными в такой системе являются также распределение и плотность вероятности реализации значений скорости молекул, характеризующиеся гауссовскими функциями.

Режим турбулентного течения жидкости отличается от такой равновесной стохастической системы тем, что на всех масштабах, превосходящих масштаб броуновского движения молекул, система находится не в состоянии равновесия, а в состоянии квазиравновесия, которое возникает в результате действия на систему внешних сил и разрушается при прекращении этого действия. В турбулентном режиме реализуются коллективные движения молекул на микро-, мезо- и макроуровнях, превосходящих масштаб броуновского движения молекул. Такая стохастическая система находится вдали от положения равновесия и характеризуется тем, что плотность вероятности реализации случайного значения скорости, как показано в работах [36-37], не является постоянной величиной, а изменяется со временем за счет внутренних механизмов влияния реализованных значений скорости на плотность вероятности реализации этой скорости. В таком процессе происходит непрерывное производство энтропии, а распределение скорости приобретает вид «гауссианы» с «тяжелыми» - степенными – «хвостами».

Как показано в работах [8], [38-40], для учета производства энтропии в таком процессе, в левую часть УНС, характеризующую полную производную по времени, необходимо добавить дополнительный член, отвечающий за изменение скорости при изменении плотности вероятности реализации случайной величины.

Добавление такого слагаемого позволило аналитически решить задачи Хагена-Пуазейля [8], плоского течения Пуазейля [39-40] и плоского течения Куэтта [38]. Во всех этих задачах удалось найти решения, описывающие как ламинарные, так и турбулентные режимы течения. В задачах Хагена-Пуазейля и в плоской задаче Пуазейля показано, что при турбулентном режиме, течение жидкости в пристеночных областях характеризуется логарифмическим профилем скорости с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана. А в центральной части скорость течения описывается функциями, являющимися интерференцией функций, характеризующих ламинарные режимы течения, и гармонических функций, волновые числа в которых задаются параметрами, зависящими от числа Рейнольдса. При этом логарифмический профиль в пристеночной области формируется за счет двух факторов, накладываемых на решения в центральной части: «прилипание» жидкости на стенке и равенства скорости жидкости значению динамической скорости на границе вязкого подслоя (на расстоянии динамической длины от стенки).

Поэтому, если решать обычные (не модифицированные) УНС (без учета изменения плотности вероятности и производства энтропии), но при этом, к получаемому «ламинарному» решению искусственно добавлять воздействие в виде гармонических граничных условий в центральной области течения, а также ставить стандартные условия на стенке и границе вязкого подслоя, то вполне можно сформировать решение, соответствующее турбулентному режиму течения.

Необходимо подчеркнуть, что отличия в решениях УНС и модифицированных УНС, по всей видимости, наблюдаться всё-таки будут, поскольку в аналитических методах решения модифицированных УНС гармонические добавки к скорости получаются в поперечном относительно потока направлении, а гармонические граничные условия в методах прямого численного моделирования УНС задаются вдоль него. Однако влияние нелинейных конвективных эффектов в последнем случае будет направлено на то, чтобы распределение вихрей, порождаемых гармоническими возмущениями, довольно быстро приобрело достаточно изотропный характер.

Стохастичность, обусловленная несовместностью дифференциальных уравнений из-за конечности временного шага, обсуждаемая выше, также может внести свою лепту в решения, найденные на основе метода прямого численного моделирования УНС. Ее влияние может проявиться в виде возникновения дополнительных гармоник, являющихся промежуточными по масштабу между масштабом гармонических граничных условий и сеточным масштабом вычислений.

Однако если граничные условия в виде гармонических функций в центральной области течения не будут заданы, то сама по себе такая «стохастичность» не позволит выйти на «турбулентное» решение в силу своей статичности. В системах уравнений типа Лоренца нет механизмов, приводящих к изменению распределения и плотности вероятности случайных величин вслед за реализованными значениями. Стохастичность таких систем, в некотором роде, аналогична «стохастике» броуновского движения. И так же, как однородное броуновское движение молекул жидкости не порождает турбулентности, так и стохастичность, обусловленная только несовместностью дифференциальных уравнений из-за конечности временного шага, не сможет породить дополнительные решения уравнений Навье-Стокса, соответствующие турбулентному режиму течения.

Заключение.

В работе подняты вопросы о принципиальной возможности возникновения стохастического процесса в системах, описываемых детерминированными автономными дифференциальными уравнениями, подчиняющимися теореме Коши о существовании и единственности.

Показано, что в САДУ типа Лоренца возможно возникновение не только детерминированного хаоса, имеющего сложную для анализа и интерпретации структуру, а истинной недетерминированности - «стохастичности», обусловленной несовместностью дифференциальных уравнений из-за конечности временного шага. Причем, это явление может возникнуть на ***любом*** сколь угодно малом, но конечном шаге по времени. Это может свидетельствовать об отсутствии детерминированности процессов в некоторых замкнутых системах, например, такой системы, как Вселенная.

Однако стохастичность таких систем определяется стационарными распределениями и плотностями вероятности. Это не позволяет напрямую моделировать стохастические процессы, обусловленные нестационарными плотностями вероятности и, соответственно, производством энтропии, такие как, например, турбулентность. Однако дополнительно накладываемые гармонические граничные условия при решении УНС методом прямого численного моделирования, совместно со стационарной «стохастикой», обусловленной несовместностью дифференциальных уравнений, могут порождать возмущения на масштабах промежуточных между масштабом гармонических граничных условий и сеточным масштабом вычислений, что, в конечном счете, может приводить к появлению решений, близких к «турбулентным». Такой метод может рассматриваться, в некотором смысле, как аналоговое моделирование турбулентности.

Разработанный подход к исследованию автономных дифференциальных уравнений через рассмотрение величины временных интервалов на каждом итерационном шаге в каждом из «пространственных» направлений, позволил аналитически определить фрактальную размерность странного аттрактора САДУ Лоренца.

Библиографический список

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. - М.: Мир, 1991. - 504 с.

2. Котельников М.В., Нгуен Суан Тхау. Оптимизация программного блока в задачах механики и электродинамики пристеночной плазмы // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=28798

3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистком подходе к турбулентности. - М.: Мир, 1991. - 368 с.

4. Tucker W. A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem // Foundations of Computational Mathematics, 2002, no. 2(1), pp. 53 - 117. DOI: 10.1007/s002080010018

5. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. - М.: Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.

6. Пчелинцев А.Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 191 – 201.

7. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255 - 257.

8. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93311

9. Иэн Стюарт. Величайшие математические задачи. - М.: Альпина нон-фикшн, 2016. - 460 с.

10. Кувшинова Е.Ю. Методика определения оптимальной траектории перелета с малой тягой между околоземной и окололунной орбитами // Труды МАИ. 2013. № 68. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=41742

11. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 231 - 241.

12. Feder J. Fractals. New York, Plenum Press, 1988, 283 p.

13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.

14. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252 – 263. DOI: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2

15. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no.7, pp. 335 - 343. DOI: https://doi.org/10.1063/1.868631

16. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow // Europhysics Letters, 1998, vol. 43, no. 2, pp. 171 – 176, available at: https://doi.org/10.1209/epl/i1998-00336-3

17. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow // Physics of Fluids, Jan 2015. DOI: 10.1063/1.4900874

18. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, vol. 96, no.1, pp. 159 – 205, available at: https://doi.org/10.1017/S0022112080002066

19. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=75565

20. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

21. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

22. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49670

23. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29361

24. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=43066

25. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49676

26. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: http://trudymai.ru/upload/iblock/1e7/rus.pdf

27. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows // 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.

28. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation // Computers Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227 – 238, available at: https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)00032-T

29. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, p. 537 – 566. DOI: 10.1017/S0022112075001814

30. Launder B.E., Spalding D.B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence, London, Academic Press, 1972, 169 p.

31. Wilcox David C. Turbulence Modeling for CFD. Second edition, Anaheim: DCW Industries, 1998, 174 p.

32. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520, available at: https://doi.org/10.1063/1.858424

33. Никущенко Д.В., Мялкин Р.А. Моделирование кавитационного обтекания крыла на основе методов вычислительной гидродинамики // Морские интеллектуальные технологии. 2014. Т. 2. № 4(26). С. 83 - 87.

34. Павловский В.А., Хитрых Д.П., Маламанов С.Ю. Численное исследование нестационарного кавитационного обтекания гидрокрыла NACA009 // Морские интеллектуальные технологии. 2018. Т. 1. № 2(40). С. 138 - 143.

35. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 6. С. 14 – 26.

36. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98854

37. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 1. С. 62 - 85.

38. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=102091

39. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http:// trudymai.ru/published.php?ID=105673

40. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=109382

On stochastic properties of dynamic chaos in systems of autonomous differential equations, such as the Lorentz system

Khatuntseva O.N.

Korolev Rocket and Space Corporation "Energia",

4a, Lenin str., Korolev, Moscow region, 141070, Russia

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Abstract

At present, there are no stability criteria similar to Courant-Friedrichs-Lewy criteria for systems of autonomous differential equations (SADE). The instabilities, manifesting themselves as a computational chaos, occur while the numerical integration of SADE. Moreover, the time step decrease does not lead to this instability elimination. Commonly, the studies on determining the sensitivity of solutions to the initial conditions setting are being conducted to explain the deterministic chaos phenomenon. These studies demonstrate exponential divergence of initially close solution trajectories, and impossibility of selecting such small computational error to "conquer" the uncertainty in the Lorenz type SADE.

The conclusion is drawn from this circumstance that since the principal difficulties do not allow achieving the necessary accuracy, there is no need to muse about determinism. However, such approach does not resolve the problem of solutions determinism, irrespectively to the possibility or impossibility of obtaining of the information regarding the evolution of the considered system. The issues of predestination in the closed systems, in particular with such closed system as Universe, conjugate with these issues.

The studies conducted in the presented work demonstrate that the deterministic chaos occurring in SADE of Lorenz type may be associated with the stochastic process and is not,

in essence, the deterministic chaos for any finite time step.

The article discusses the issues associated with the possibility of turbulence modelling based on the Navier-Stokes equations via direct numerical simulation technique.

The problems related with the feasibility for modeling of the turbulence on the basis of Navier-Stokes equations via the direct numerical simulations are also addressed in the paper.

Keywords: chaos, autonomous differentiation equations, Lorenz system of equations, stochastic systems, turbulence.

References

1. Fletcher K. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostei* (Computational Techniques in Fluid Dynamics), Moscow. Mir, 1991, 504 p.

2. Kotel'nikov M.V., Nguen Suan Tkhau. *Trudy MAI*, 2012, no. 50, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28798

3. Berzhe P., Pomo I., Vidal' K. *Poryadok v khaose*. *O deterministkom podkhode k turbulentnosti* (L'ordre dans le chaos: Vers une approche déterministe de la turbulence), Moscow, Mir, 1991, 368 p.

4. Tucker W. A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem, *Foundations of Computational Mathematics,* 2002, no. 2(1), pp. 53 - 117. DOI: 10.1007/s002080010018

5. Magnitskii N.A., Sidorov S.V. *Novye metody khaoticheskoi dinamiki* (New methods of chaotic dynamics), Moscow, Editorial URSS, 2004, 320 p.

6. Pchelintsev A.N. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 191 – 201.

7. Khatuntseva O.N. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2017, no. 11, pp. 255 - 257.

8. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 100, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93311

9. Ien Styuart. *Velichaishie matematicheskie zadachi* (The outstanding mathematical problems), Moscow, Al'pina non-fikshn, 2016, 460 p.

10 The uttermost mathematical problems. Kuvshinova E.Yu. *Trudy MAI*, 2013, no 68, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=41742

11. Khatuntseva O.N. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki*, 2009, vol. 12, no. 2, pp. 231 - 241.

12. Feder J. *Fractals*. New York, Plenum Press, 1988, 283 p.

13. Shlikhting H. *Boundary layer theory*, London, Pergamon Press, 1955, 535 p.

14. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252 – 263. DOI: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2

15. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no.7, pp. 335 – 343, available at: https://doi.org/10.1063/1.868631

16. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow, *Europhysics Letters*, 1998, vol. 43, no. 2, pp. 171 – 176, available at: https://doi.org/10.1209/epl/i1998-00336-3

17. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow, *Physics of Fluids*, Jan 2015. DOI: 10.1063/1.4900874

18. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, vol. 96, no.1, pp. 159 – 205, available at: https://doi.org/10.1017/S0022112080002066

19. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565

20. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 59, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840

21. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536

22. Do S.Z. *Trudy MAI*, 2014, no. 75, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49670

23. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 53, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361

24. Krupenin A.M., Martirosov M.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 69, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43066

25. Krupenin A.M., Martirosov M.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 75, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49676

26. Makhrov V.P., Glushchenko A.A., Yur'ev A.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 64, available at: http://trudymai.ru/eng/upload/iblock/1e7/rus.pdf

27. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference, AIAA Paper*, 1993, N93-2906, pp. 21.

28. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation, *Computers Fluids*, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227 – 238, available at: https://doi.org/10.1016/0045-7930(94)00032-T

29. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, p. 537 – 566. DOI: 10.1017/S0022112075001814

30. Launder B.E., Spalding D.B. *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*, London, Academic Press, 1972, 169 p.

31. Wilcox David C. *Turbulence Modeling for CFD*. Second edition, Anaheim: DCW Industries, 1998, 174 p.

32. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520, available at: https://doi.org/10.1063/1.858424

33. Nikushchenko D.V., Myalkin R.A. *Morskie intellektual'nye tekhnologii*, 2014, vol. 2, no. 4(26), pp. 83 - 87.

34. Pavlovskii V.A., Khitrykh D.P., Malamanov S.Yu. *Morskie intellektual'nye tekhnologii*, 2018, vol. 1, no. 2(40), pp. 138 - 143.

35. Nikitin N.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1994, no. 6, pp. 14 – 26.

36. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 102, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98854

37. Khatuntseva O.N. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2011, vol. XLII, no. 1, pp. 62 - 85.

38. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 104, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102091

39. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 106, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105673

40. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 108, available at: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109382